

第 I 卷(选择题,共 85 分)

一、选择题(本大题共 17 小题,每小题 5 分,共 85 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1.不等式  $|x-2|<1$  的解集是

- A.  $\{x \mid -1 < x < 3\}$
- B.  $\{x \mid -2 < x < 1\}$
- C.  $\{x \mid -3 < x < 1\}$
- D.  $\{x \mid 1 < x < 3\}$

2.下列函数中,在  $(0, \frac{\pi}{2})$  为减函数的是

- A.  $y = \ln(3x+1)$
- B.  $y = x+1$
- C.  $y = 5\sin x$
- D.  $y = 4-2x$

3.函数  $y = \log_2(x+1)$  的定义域是

- A.  $(2, +\infty)$
- B.  $(-2, +\infty)$
- C.  $(-\infty, -1)$
- D.  $(-1, +\infty)$

4.直线  $x-y-3=0$  与  $x-y+3=0$  之间的距离为

- A.  $2\sqrt{2}$
- B.  $6\sqrt{2}$
- C.  $3\sqrt{2}$
- D. 6

5.设集合  $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $N = \{x \mid x \leq 2\}$ , 则  $M \cap N =$

- A.  $\{-1, 0, 1\}$
- B.  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
- C.  $\{x \mid 0 < x \leq 2\}$
- D.  $\{x \mid -1 < x < 2\}$

6.已知点  $A(1,0), B(-1,1)$ , 若直线  $kx-y-1=0$  与直线  $AB$  平行, 则  $k =$

- A.  $-\frac{1}{2}$
- B.  $\frac{1}{2}$
- C. -1
- D. 1

7.已知向量  $\overrightarrow{AB} = (1, t)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (-1, 1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (0, 2)$ , 则  $t =$

- A. -1
- B. 2
- C. -2
- D. 1

8.已知双曲线  $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{4} = 1$  的离心率为 3, 则  $m =$

- A. 4

B.1

C.  $\frac{1}{2}$

D.2

9.函数  $y=\sin(x+3) + \sin(x-3)$  的最大值为

A.-2sin3

B.2sin3

C.-2cos3

D.2cos3

10.已知  $a>b>1$ ,则

A. $\log_2 a > \log_2 b$

B.  $\log_2 \frac{1}{a} > \log_2 \frac{1}{b}$

C.  $\frac{1}{\log_2 a} > \frac{1}{\log_2 b}$

D.  $\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b$

11.已知  $\cos x = \frac{3}{5}$ ,且  $x$  为第一象限角,则  $\sin 2x =$

A.  $\frac{4}{5}$

B.  $\frac{24}{25}$

C.  $\frac{18}{25}$

D.  $\frac{12}{25}$

12.曲线  $y = \sin(x+2)$  的一条对称轴的方程是

A.  $x = \frac{\pi}{2}$

B.  $x = \pi$

C.  $x = \frac{\pi}{2} + 2$

D.  $x = \frac{\pi}{2} - 2$

13.若  $p:x=1$ ;  $q:x^2-1=0$ ,则

A.  $p$  既不是  $q$  的充分条件也不是  $q$  的必要条件

B.  $p$  是  $q$  的充要条件

C.  $p$  是  $q$  的必要条件但不是充分条件

D.  $p$  是  $q$  的充分条件但不是必要条件

14.已知点  $A(1,-3), B(0, -3), C(2,2)$ .则  $\Delta ABC$  的面积为

A.2

B.3

C.  $\frac{3}{2}$

D.  $\frac{5}{2}$

15. 从红、黄、蓝、黑 4 个球中任取 3 个, 则这 3 个球中有黑球的不同取法共有

- A. 3 种
- B. 4 种
- C. 2 种
- D. 6 种

16. 下列函数中, 最小正周期为  $\pi$  的函数是

- A.  $y = \sin x + \sin x^2$
- B.  $y = \sin 2x$
- C.  $y = \cos x$
- D.  $y = \sin \frac{x}{2} + 1$

17. 下列函数中, 为偶函数的是

- A.  $y = e^x + x$
- B.  $y = x^2$
- C.  $y = x^3 + 1$
- D.  $y = \ln(2x + 1)$

第 II 卷 (非选择题, 共 65 分)

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

18. 函数  $f(x) = x^2 + bx + c$  的图像经过点  $(-1, 0)$ ,  $(3, 0)$ . 则  $f(x)$  的最小值为\_\_\_\_\_.

19. 某同学每次投篮命中的概率都是 0.6, 各次是否投中相互独立, 则该同学投篮 3 次恰有 2 次投中的概率是\_\_\_\_\_.

20. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $\frac{3^n}{2}$ , 则  $a_3 =$ \_\_\_\_\_.

21. 已知曲线  $y = \ln x + a$  在点  $(1, a)$  处的切线过点  $(2, -1)$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

三、解答题 (本大题共 4 小题, 共 49 分. 解答应写出推理、演算步骤)

22. (本小题满分 12 分)

在  $\triangle ABC$  中,  $A = 30^\circ$ ,  $AB = \sqrt{3}$ ,  $BC = 1$ .

- (I) 求  $C$ ;
- (II) 求  $\triangle ABC$  的面积.

23. (本小题满分 12 分)

设函数  $f(x) = x^3 + x - 1$ .

- (I) 求  $f(x)$  的单调区间;
- (II) 求出一个区间  $(a, b)$ , 使得  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  存在零点, 且  $b - a < 0.5$ .

24. (本小题满分 12 分)

已知  $\{a_n\}$  是等差数列, 且  $a_2 = -2$ ,  $a_4 = -1$ .

- (I) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (II) 求  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

25. (本小题满分 13 分)

已知椭圆  $E$  的中心在坐标原点  $O$ , 焦点在  $x$  轴上, 长轴长为 8, 焦距为  $2\sqrt{7}$ .

- (I) 求  $E$  的标准方程;
- (II) 若以  $O$  为圆心的圆与  $E$  交于四点, 且这四点为一个正方形的四个顶点, 求该圆的半径.

## 参考答案及解析

### 一、选择题

1. 【答案】D

【考情点拨】本题主要考查的知识点为绝对值不等式.

【应试指导】 $|x-2|<1 \rightarrow -1 < x < 3 \rightarrow 1 < x < 3$ , 故不等式的解集为 $\{x|1 < x < 3\}$ .

2. 【答案】D

【考情点拨】本题主要考查的知识点为函数的单调性.

0,哥)上为增函数,只有D选项在实数域上为减

【应试指导】A、B选项在其定义域上为增函数,选项C在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上为增函数.只有D选项在

实数域上为减区间.

3. 【答案】D

【考情点拨】本题主要考查的知识点为对数函数的性质.

【应试指导】由对数函数的性质可知 $x+1>0 \rightarrow x>-1$ ,故函数的定义域为 $(-1, +\infty)$ .

4. 【答案】C

【考情点拨】本题主要考查的知识点为直线间的距离.

【应试指导】由题可知,两直线平行,故两直线的距离即为其中一条直线上一点到另一条直线的

距离.取直线 $x-y-3=0$ 上一点 $(4,1)$ ,点 $(4,1)$ 到直线 $x-y+3=0$ 的距离为 $d=\frac{4-1+3}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$

5. 【答案】B

【考情点拨】本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】由于 $M \subseteq N$ ,故 $M \cap N = M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

6. 【答案】A

【考情点拨】本题主要考查的知识点为直线的斜率.

,而直线 $kx - y - 1 = 0$ 的斜率为 $k$ ,故 $k = -1$

【应试指导】两直线平行则其斜率相等, $k_{AB} = \frac{1-0}{-1-1} = -\frac{1}{2}$ ,而直线 $kx - y - 1 = 0$ 的斜率为 $k$ ,故 $k = -\frac{1}{2}$

7. 【答案】D

【考情点拨】本题主要考查的知识点为向量的运算.

【应试指导】 $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} = (1, t) + (-1, 1) = (0, 2)$ ,故有 $t + 1 = 2 \rightarrow t = 1$ .

8. 【答案】C

【考情点拨】本题主要考查的知识点为双曲线.

【应试指导】由题知, $a^2 = m, b^2 = 4, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{m + 4}$ ,其离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{m+4}}{\sqrt{m}} = 3$ ,故 $m = \frac{1}{2}$ .

9. 【答案】D

【考情点拨】本题主要考查的知识点为三角函数的运算.

【应试指导】 $y = \sin x \cos 3 + \cos x \sin 3 + \sin x \cos 3 - \cos x \sin 3 = 2 \sin x \cos 3$ ,  $\sin x$ 的最大值为1,故原函数的最大值为 $2 \cos 3$ .

10. 【答案】A

【考情点拨】本题主要考查的知识点为对数函数的性质.

【应试指导】函数 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,由于 $a > b > 1$ ,故有 $\log_2 a > \log_2 b$ .

11. 【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数.

【应试指导】 由于  $x$  为第一象限角,故  $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$ ,因此  $\sin 2x =$

$2\sin x \cos x =$

$$2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

12. 【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的性质.

【应试指导】  $y = \sin(x+2)$  是函数  $y = \sin x$  向左平移 2 个单位得到的,故其对称轴也向左平移 2 个单位,  $x = \frac{\pi}{2}$  是函数  $y = \sin x$  的一个对称轴,因此  $x = \frac{\pi}{2} - 2$  是  $y = \sin(x+2)$  的一条对称轴.

13. 【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为简易逻辑.

【应试指导】  $x = 1 \rightarrow x^2 - 1 = 0$ ,而  $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = 1$  或  $x = -1$ ,故  $p$  是  $q$  的充分但不必要条件.

14. 【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为解三角形.

【应试指导】 易知  $AB = 1$ ,点  $C$  到  $AB$  边的距离为  $2+3=5$ ,故  $AB$  边的高为 5,因此三角形的面积为  $\frac{1}{2} \times 1 \times 5 = \frac{5}{2}$

15. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为随机事件.

【应试指导】 3 个球中有黑球的取法有  $C_1^1 \cdot C_3^2 = 3$  种.

16. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的性质.

【应试指导】 B 项中,函数的最小正周期  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

17. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的奇偶性.

【应试指导】 A、C、D 项为非奇非偶函数,B 项为偶函数.

二、填空题

18. 【答案】 -4

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为一元二次函数的性质.

【应试指导】 由于函数开口向上,故其在对称轴处取得最小值,又函数过点  $(-1,0), (3,0)$ ,故其对称轴为  $x = \frac{-1+3}{2} = 1$ ,  $f_{\min}(1) = 1 + b + c$ ,而  $f(-1) = 1 - b + c = 0$ ,  $f(3) = 9 + 3b + c = 0$ , 得  $b = -2, c = -3$ ,故  $f_{\min}(1) = 1 - 2 - 3 = -4$

19. 【答案】 0.432

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为随机事件的概率.

【应试指导】 投篮 3 次恰有 2 次投中的概率为  $C_3^2 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4 = 0.432$

20. 【答案】 9

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为数列的性质.

【应试指导】 由题知  $S_n = \frac{3^n}{2}$ ,故有  $a_1 = \frac{3}{2}, a_2 = S_2 - a_1 = \frac{3^2}{2} - \frac{3}{2} = 3, a_3 = S_3 - a_2 - a_1 = \frac{3^3}{2} - 3 - \frac{3}{2} = 9$ .

21. 【答案】 -2

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为曲线的切线.

【应试指导】  $y' = \frac{1}{x}$ , 故曲线在点  $(1, a)$  处的切线的斜率为  $y'|_{x=1} = \frac{1}{x}|_{x=1} = 1$ , 因此切线方程为  $y - a = x - 1$ , 即  $y = x - 1 + a$ . 又切线过点  $(2, -1)$ , 因此有  $-1 = 2 - 1 + a$ , 故  $a = -2$ .

三、解答题

22. (I) 由正弦定理得  $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$ ,

即  $\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sin C}$ , 解得  $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

故  $C = 60^\circ$  或  $120^\circ$ .

(II) 由余弦定理得  $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{3 + AC^2 - 1}{2\sqrt{3}AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

解得  $AC = 1$  或  $AC = 2$ .

当  $AC = 1$  时,  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

当  $AC = 2$  时,  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2 \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

23. (I)  $f'(a) = 3a^2 + 1 > 0$ ,

故函数在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 故其单调区间为  $\mathbf{R}$ .

(II) 令  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{3}{4}$ , 则有

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 < 0$ ,  $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{64} + \frac{3}{4} - 1 > 0$

又由于函数在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 故其在  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$  内存在零点,

且  $b - a = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} < 0.5$  (答案不唯一)

24. (I) 由题可知

$a_4 = a_2 + 2d = -2 + 2d = -1$ ,

可得  $d = \frac{1}{2}$ .

故  $a_n = a_2 + (n-2)d = -2 + (n-2) \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2} - 3$

(II) 由(I)可知  $a_1 = \frac{1}{2} \times 1 - 3 = -\frac{5}{2}$ ,

故  $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n\left(-\frac{5}{2} + \frac{n}{2} - 3\right)}{2} = \frac{1}{4}n(n - 11)$

25. (I) 由题知  $2a = 8, 2c = 2\sqrt{7}$ ,

故  $a = 4, c = \sqrt{7}, b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{16 - 7} = 3$ ,

因此椭圆方程为  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

(II) 设圆的方程为  $x^2 + y^2 = R^2$ ,

因为圆与椭圆的四个交点为一正方形的顶点, 设其在第一象限的交点为  $A$ , 则有  $OA = R$ ,  $A$  点到  $x$  轴与  $y$  轴的距离相等,

可求得 A 点的坐标为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R)$ ,

而 A 点也在椭圆上,故有 $\frac{R^2}{16} + \frac{R^2}{9} = 1$

解得  $R = \frac{12\sqrt{2}}{5}$ .

