

一、选择题（1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1.  $\int \frac{3}{x^5} dx =$

A.  $-\frac{3}{5x^4} + C$

B.  $\frac{3}{5x^4} + C$

C.  $-\frac{3}{4x^4} + C$

D.  $\frac{3}{4x^4} + C$

2. 设函数  $f(x)=2\ln x$ ，则  $f''(x)=$

A.  $-\frac{1}{x^2}$

B.  $\frac{1}{x^2}$

C.  $-\frac{2}{x^2}$

D.  $\frac{2}{x^2}$

3.  $\int_{-2}^2 (1+x) dx =$

A. 4

B. 0

C. 2

E. 4

4. 设函数  $f(x)=3+x^5$ ，则  $f'(x)=$

A.  $5x^4$

B.  $\frac{1}{5}x^4$

C.  $1+x^4$

D.  $x^4$

5. 设函数  $z=x^3+xy^2+3$ ，则  $\frac{\partial z}{\partial y}=$

A.  $2y$

B.  $2xy$

C.  $3x^2 + y^2$

D.  $3x^2 + 2xy$

6. 设函数  $y=x+2\sin x$ ，则  $dy=$

A.  $(1+\cos x)dx$

B.  $(1+2\cos x)dx$

C.  $(1-\cos x)dx$

D.  $(1-2\cos x)dx$

7. 设函数  $z = x^2 - 4y^2$ , 则  $dz =$

- A.  $xdx-4ydy$
- B.  $xdx-ydy$
- C.  $2xdx-4ydy$
- D.  $2xdx-8ydy$

8. 方程  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  表示的二次曲面是

- A. 圆锥面
- B. 球面
- C. 旋转抛物面
- D. 柱面

9.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x^2-x+2} =$

- A. 2
- B. 1
- C.  $\frac{3}{2}$
- D.  $\frac{1}{2}$

10. 微分方程  $y'+y=0$  的通解为  $y=$

- A.  $Cxe^x$
- B.  $Cxe^{-x}$
- C.  $Ce^x$
- D.  $Ce^{-x}$

二、填空题 (11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11.  $\int_{-\infty}^1 e^x dx =$  \_\_\_\_\_.

12. 设函数  $y = e^{2x}$ , 则  $dy =$  \_\_\_\_\_.

13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} =$  \_\_\_\_\_.

14.  $\int (3x + 2\sin x) dx =$  \_\_\_\_\_.

15. 曲线  $y = \arctan(3x+1)$  在点  $(0, \frac{\pi}{4})$  处切线的斜率为 \_\_\_\_\_.

16. 若函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0 \\ a + \sin x, & x > 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则  $a=$  \_\_\_\_\_.

17. 过点  $(-1, 2, 3)$  且与直线  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{4}$  垂直的平面方程为 \_\_\_\_\_.

18. 函数  $f(x) = x^3 - 6x$  的单调递减区间为 \_\_\_\_\_.

19. 区域  $D = \{(x,y) | 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}$  的面积为 \_\_\_\_\_.

20. 方程  $y^3 + \ln y - x^2 = 0$  在点  $(1, 1)$  的某邻域确定隐函数  $y = y(x)$ , 则  $\frac{dy}{dx}|_{x=1} =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题 (21~28 题, 共 70 分, 解答应写推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

计算  $\int x \sin x dx$

22. (本题满分 8 分)

已知函数  $f(x)=e^x \cos x$ , 求  $f'(\frac{\pi}{2})$ .

23. (本题满分 8 分)

计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x}$

24. (本题满分 8 分)

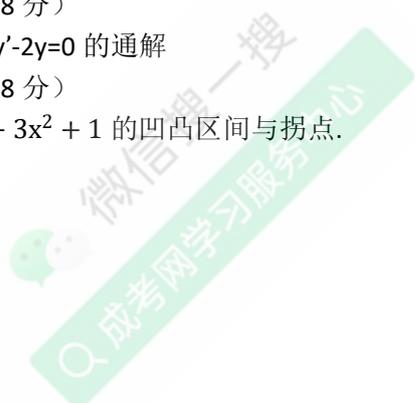
计算  $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx$ .

25. (本题满分 8 分)

求微分方程  $y'' - y' - 2y = 0$  的通解

26. (本题满分 8 分)

求曲线  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  的凹凸区间与拐点.



## 参考答案及解析

### 一、选择题

1. 【答案】C

【考情分析】本题考查了不定积分的知识点。

【应试指导】 $\int \frac{3}{x^5} dx = 3 \times \frac{1}{-5+1} x^{-5+1} + C = -\frac{3}{4x^4} + C$

2. 【答案】C

【考情分析】本题考查了二阶导函数的知识点

【应试指导】 $f'(x) = (2\ln x)' = \frac{2}{x}$ ,  $f''(x) = (\frac{2}{x})' = -\frac{2}{x^2}$

3. 【答案】A

【考情分析】本题考查了牛顿-莱布尼茨公式的知识点

【应试指导】 $\int_{-2}^2 (1+x) dx = (x + \frac{1}{2}x^2)|_{-2}^2 = 4$

4. 【答案】A

【考情分析】本题考查了一阶导数的知识点

【应试指导】 $f'(x) = (3+x^5)' = 5x^4$

5. 【答案】B

【考情分析】本题考查了函数的偏导数的知识点

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot (y^2)' = 2xy$ .

6. 【答案】B

【考情分析】本题考查了函数微分的知识点

【应试指导】 $y' = (x+2\sin x)' = 1+2\cos x$ , 故  $dy = y'dx = (1+2\cos x)dx$ .

7. 【答案】D

【考情分析】本题考查了全微分的知识点

【应试指导】易知  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -8y$ , 故  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2x dx - 8y dy$

8. 【答案】A

【考情分析】本题考查了二次曲面的知识点

【应试指导】根据曲面方程的特点可知, 题中的曲面为圆锥面

9. 【答案】C

【考情分析】本题考查了分式函数的极限的知识点

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x^2-x+2} = \frac{1^2+1+1}{1^2-1+2} = \frac{3}{2}$

10. 【答案】D

【考情分析】本题考查了微分方程的通解的知识点

【应试指导】原微分方程分离变量得  $\frac{dy}{y} = -dx$ , 两边积分  $\int \frac{1}{y} dy = -\int dx$ , 解得  $\ln|y| = -x + \ln C_1$ ,

即  $|y| = C_1 e^{-x}$ , 令  $C = \pm C_1$ , 则有  $y = C e^{-x}$

### 二、填空题

11. 【答案】e

【考情分析】本题考查了反常积分的知识点。

【应试指导】 $\int_{-\infty}^1 e^x dx = e^x|_{-\infty}^1 = e - 0 = e$

12. 【答案】 $2e^{2x}dx$

【考情分析】本题考查了函数微分的知识点

【应试指导】 $y' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$ , 故  $dy = y'dx = 2e^{2x}dx$

13. 【答案】1

【考情分析】本题考查了函数极限的知识点。

【应试指导】 $x \rightarrow 0$  时,  $x^2 \rightarrow 0$ , 故有  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$

14. 【答案】 $\frac{3}{2}x^2 - 2\cos x + C$

【考情分析】本题考查了不定积分的知识点

【应试指导】 $\int (3x + 2\sin x)dx = \frac{3}{2}x^2 - 2\cos x + C$

15. 【答案】 $\frac{3}{2}$

【考情分析】本题考查了曲线的切线的知识点

【应试指导】 $y' = [\arctan(3x+1)]' = \frac{3}{1+(3x+1)^2}$ , 故曲线在点  $(0, \frac{\pi}{4})$  处的切线斜率为  $y'|_{x=0} =$

$\frac{3}{1+(3x+1)^2}|_{x=0} = \frac{3}{2}$

16. 【答案】-2

【考情分析】本题考查了分段函数连续性的知识点

【应试指导】由于  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 故有  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , 而  $f(0) = -2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 2) = -2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + \sin x) = a$ , 因此  $a = -2$

17. 【答案】 $2x+3y+4z=16$

【考情分析】本题考查了平面方程的知识点

【应试指导】已知直线与所求平面垂直, 故所求平面的法向量为  $\mathbf{n} = (2, 3, 4)$ , 因此所求平面的方程为  $2(x+1)+3(y-2)+4(z-3)=0$ , 即  $2x+3y+4z=16$ .

18. 【答案】 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

【考情分析】本题考查了函数的单调性的知识点

【应试指导】易知  $f'(x) = 3x^2 - 6$ , 令  $f'(x) < 0$ , 则有  $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ , 故  $f(x)$  的单调递减区间为  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

19. 【答案】 $\frac{4}{3}$

【考情分析】本题考查了定积分的应用的知识点

【应试指导】区域  $D$  的面积为  $\int_1^2 (x^2 - 1)dx = (\frac{1}{3}x^3 - x)|_1^2 = \frac{4}{3}$

20. 【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情分析】本题考查了隐函数求导的知识点

【应试指导】方程两边对  $x$  求导, 得  $3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} - 2x = 0$ , 即  $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3y^3+1}$ , 故有  $\frac{dy}{dx}|_{x=1} =$

$$\frac{2xy}{3y^3+1} \Big|_{x=1} = \frac{2 \times 1 \times 1}{3 \times 1^3 + 1} = \frac{1}{2}$$

三、解答题

$$21. \int x \sin x dx = - \int x d(\cos x) = - (x \cos x - \int \cos x dx) = - x \cos x + \int \cos x dx = - x \cos x + \sin x + C$$

$$22. f'(x) = e^x \cos x + e^x \cdot (\cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x),$$

$$f''(x) = e^x (\cos x - \sin x) + e^x (\cos x - \sin x)' = e^x (\cos x - \sin x) + e^x (-\sin x - \cos x) = -2e^x \sin x,$$

$$\text{故有 } f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} = -2e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{2x^2} - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$24. \int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{3}} d(x+1) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} (1+x)^{\frac{1}{3}+1} \Big|_0^1 = \frac{3}{4} (1+x)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 = \frac{3}{4} (2^{\frac{4}{3}} - 1)$$

$$25. \text{原方程对应的特征方程为 } r^2 - r - 2 = 0$$

$$\text{解得 } r_1 = -1, r_2 = 2$$

$$\text{故原方程的通解为 } y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

$$26. y' = 3x^2 - 6x + 2, y'' = 6x - 6$$

$$\text{令 } y'' = 0, \text{ 得 } x = 1.$$

当  $x > 1$  时,  $y'' > 0$ , 故  $(1, +\infty)$  为曲线的凹区间;

当  $x < 1$  时,  $y'' < 0$ , 故  $(-\infty, 1)$  为曲线的凸区间;

函数的拐点为  $(1, 1)$

$$27. \text{积分区域 } D = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\},$$

故

$$\iint_D xy dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \sin \theta d\theta \cdot \int_0^1 r^3 dr$$

$$= -\frac{1}{4} \cos 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 = -\frac{1}{4} (0 - 1) \times \frac{1}{4} (1 - 0) = \frac{1}{16}$$

28.

$$f(x) = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{3+x-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-1}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-1)^n, \quad -2 < x < 4$$