

# 2021 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

## 高等数学(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 150 分钟。

### 第Ⅰ卷(选择题,共 40 分)

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{x} = 2$ , 则  $m =$  ( )

A. 0

B.  $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

2. 设  $y = e^x + \cos x$ , 则  $y' =$  ( )

A.  $e^x + \cos x$

B.  $e^x - \cos x$

C.  $e^x - \sin x$

D.  $e^x + \sin x$

3. 设  $y = x \tan x$ , 则  $y' =$  ( )

A.  $\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$

B.  $\frac{x}{\cos^2 x}$

C.  $\arctan x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

D.  $\tan x + \frac{x}{1+x^2}$

4. 设  $y = \frac{1}{1+x}$ , 则  $y'' =$  ( )

A.  $-\frac{2}{(1+x)^3}$

B.  $-\frac{1}{(1+x)^3}$

C.  $\frac{1}{(1+x)^3}$

D.  $\frac{2}{(1+x)^3}$

5. 曲线  $y = x^3 + 1$  拐点为 ( )

A.  $(0, 0)$

B.  $(0, 1)$

C.  $(-1, 0)$

D.  $(1, 1)$

6. 设  $f(x)$  的一个原函数为  $\cos 2x$ , 则  $f(x) =$  ( )

A.  $-\sin 2x$

B.  $\sin 2x$

C.  $-2\sin 2x$

D.  $2\sin 2x$

7. 设  $\int_{-a}^a (x^2 + x^3) dx = \frac{2}{3}$ , 则  $a =$  ( )

- A. -2 B. -1  
C. 1 D. 2

8. 设  $z = \sin(x - 3y^2)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} =$  ( )

- A.  $-6y \cos(x - 3y^2)$  B.  $-6y \sin(x - 3y^2)$   
C.  $6y \cos(x - 3y^2)$  D.  $6y \sin(x - 3y^2)$

9. 设  $z = f(x^2 + y)$ , 其中  $f$  具有二阶导数, 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$  ( )

- A.  $xf''(x^2 + y)$  B.  $2xf''(x^2 + y)$   
C.  $yf''(x^2 + y)$  D.  $2xyf''(x^2 + y)$

10. 已知事件  $A$  与  $B$  互斥, 且  $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4$ , 则  $P(A+B) =$  ( )

- A. 0.4 B. 0.5  
C. 0.7 D. 0.9

## 第 II 卷 (非选择题, 共 110 分)

### 二、填空题 (11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} =$  \_\_\_\_\_.

12. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ a, & x = 1 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 求  $a =$  \_\_\_\_\_.

13.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x + 2} =$  \_\_\_\_\_.

14. 设  $y = \cos(x + \frac{1}{x})$ , 则  $y'(1) =$  \_\_\_\_\_.

15. 设  $f(\frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x} + 1$ , 则  $f'(x) =$  \_\_\_\_\_.

16. 曲线  $y = 2x^3 + x - 1$  在点  $(0, -1)$  处法线的斜率为 \_\_\_\_\_.

17.  $\int \frac{1}{4+x^2} dx =$  \_\_\_\_\_.

18.  $\int x(x^2 - 1) dx =$  \_\_\_\_\_.

19.  $\int_0^1 (x + e^x) dx =$  \_\_\_\_\_.

20. 设函数  $f(x, y) = x + y$ , 则  $f(x+y, x-y) =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题(21~28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ .

22. (本题满分 8 分)

求函数  $f(x) = e^{-x^2}$  的单调区间和极值.

23. (本题满分 8 分)

求  $\int (2\arcsin x + 1) dx$ .

24. (本题满分 8 分)

计算  $\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$ .

25. (本题满分 8 分)

设离散型随机变量  $X$  的概率分布为

|     |     |      |      |      |
|-----|-----|------|------|------|
| $X$ | 0   | 1    | 2    | 3    |
| $P$ | $a$ | $3a$ | $4a$ | $2a$ |

其中  $a$  为常数.

(1) 求  $a$ ;

(2) 求  $E(X)$ .

26. (本题满分 10 分)

设  $y=y(x)$  是由方程  $e^y=x^2+y$  所确定的隐函数, 求  $\frac{dy}{dx}$ .

27. (本题满分 10 分)

设  $D$  为由直线  $x+y-4=0$  与曲线  $y=\frac{3}{x}$  所围成的闭区域.

(1) 求  $D$  的面积;

(2) 求  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积.

28. (本题满分 10 分)

求函数  $f(x, y)=x^2+y^2$  在条件  $x^2+y^2-xy-1=0$  下的最大值和最小值.

## 2021 年成人高等学校专升本招生全国统一考试 高等数学(二)参考答案

### 一、选择题

1.  $D$       2.  $C$       3.  $A$       4.  $D$       5.  $B$       6.  $C$   
7.  $C$       8.  $A$       9.  $B$       10.  $D$

### 二、填空题

11.  $\frac{3}{2}$       12.  $e$   
13.  $2$       14.  $0$   
15.  $-\frac{2}{x^3}+1$       16.  $-1$   
17.  $\frac{1}{2}\arctan \frac{\pi}{2}+C$       18.  $\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+C$   
19.  $e-\frac{1}{2}$       20.  $2x$

### 三、解答题

$$\begin{aligned} 21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

22. 函数  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ,  $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ .

令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = 0$ ,

当  $x < 0$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x > 0$  时,  $f'(x) < 0$ ;

所以  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty, 0)$  单调递减区间为  $(0, +\infty)$ ,

$f(x)$  的极大值为  $f(0) = 1$ .

$$\begin{aligned} 23. \int (2\arcsin x + 1) dx &= 2x \arcsin x - 2 \int x d(\arcsin x) + x \\ &= 2x \arcsin x - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx + x \\ &= 2x \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} + x + C \end{aligned}$$

24. 令  $t = \sqrt{x}$ , 则  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ .

当  $x = 1$  时,  $t = 1$ ; 当  $x = 4$  时,  $t = 2$ . 因此

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx &= \int_1^2 \frac{2t}{t^2 + t} dt \\ &= 2 \int_1^2 \frac{1}{t + 1} dt \\ &= 2 \ln(t + 1) \Big|_1^2 \\ &= 2 \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

25. (1) 由概率分布的性质知

$$a + 3a + 4a + 2a = 1,$$

所以  $a = 0.1$ .

$$\begin{aligned} (2) E(X) &= 0 \times 0.1 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.2 \\ &= 1.7. \end{aligned}$$

26. 方程两边对  $x$  求导, 得  $e^y \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{dy}{dx}$ ,

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{e^y - 1}.$$

27. 由  $\begin{cases} x+y-4=0, \\ y=\frac{3}{x} \end{cases}$  解得交点坐标为  $(1,3), (3,1)$ .

$$\begin{aligned} (1) D \text{ 的面积 } S &= \int_1^3 (4-x-\frac{3}{x}) dx \\ &= (4x - \frac{x^2}{2} - 3\ln x) \Big|_1^3 \\ &= 4 - 3\ln 3 \end{aligned}$$

(2)  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_1^3 [(4-x)^2 - (\frac{3}{x})^2] dx \\ &= \pi [-\frac{1}{3}(4-x)^3 + \frac{9}{x}] \Big|_1^3 \\ &= \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

28. 设  $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - xy - 1)$ , 则

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda(2x - y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda(2y - x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - xy - 1.$$

由  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  与  $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$  解得  $x=y$  或  $x=-y$ ,

代入  $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$  得  $f(x, y)$  在条件  $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$  下可能的极值点为

$$(1, 1), (-1, -1), (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}), (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}).$$

因为由题设可知最大值和最小值一定存在, 所以最大值和最小值就在这些可能的极值点处取得.

$$\text{又 } f(1, 1) = f(-1, -1) = 2,$$

$$f(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}) = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{2}{3},$$

所以所求的最大值为 2, 最小值为  $\frac{2}{3}$ .