

一、选择题（1~10，每小题 4 分，共 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{3x}} =$

A. $e^{\frac{3}{2}}$

B. $e^{\frac{2}{3}}$

C. $e^{\frac{1}{6}}$

D. e^6

2. 设函数 $y = x + 2\sin x$ ，则 $dy =$

A. $(1 - 2\cos x)dx$

B. $(1 + 2\cos x)dx$

C. $(1 - \cos x)dx$

D. $(1 + \cos x)dx$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 2} =$

A. $\frac{3}{2}$

B. 1

C. 2

D. $\frac{1}{2}$

4. 设函数 $f(x) = 3 + x^5$ ，则 $f'(x) =$

A. x^4

B. $1 + x^4$

C. $\frac{1}{5}x^4$

D. $5x^4$

5. 设函数 $f(x) = 2\ln x$ ，则 $f''(x) =$

A. $\frac{2}{x^2}$

B. $-\frac{2}{x^2}$

C. $\frac{1}{x^2}$

D. $-\frac{1}{x^2}$

6. $\int_{-2}^2 (1 + x)dx =$

A. 4

B. 0

C. 2

E. -4

7. $\int \frac{3}{x^5} dx =$

A. $\frac{3}{4x^4} + C$

B. $\frac{3}{5x^4} + C$

C. $-\frac{3}{4x^4} + C$

D. $-\frac{3}{5x^4} + C$

8. 把 3 本不同的语文书和 2 本不同的英语书排成一排, 则 2 本英语书卡好相邻的概率为

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{1}{2}$

9. 设函数 $z=x^2-4y^2$, 则 $dz=$

A. $xdx-4ydy$

B. $xdx-ydy$

C. $2xdx-4ydy$

D. $2xdx-8ydy$

10. 设函数 $z=x^3+xy^2+3$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$

A. $3x^2+2xy$

B. $3x^2+y^2$

C. $2xy$

D. $2y$

二、填空题 (11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. 设函数 $y=e^{2x}$, 则 $dy=$ _____.

12. 函数 $f(x)=x^3-6x$ 的单调递减区间为_____.

13. 若函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-2, & x \leq 0, \\ a+\sin x, & x > 0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$ _____.

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} =$ _____.

15. $\int (3x + 2\sin x) dx =$ _____.

16. 曲线 $y=\arctan(3x+1)$ 在点 $(0, \frac{\pi}{4})$ 处切线的斜率为_____.

17. $(\int_0^{2x} \sin t^2 dt)' =$ _____.

18. $\int_{-\infty}^1 e^x dx =$ _____.

19. 区域 $D=\{(x,y)|1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}$ 的面积为 _____.

20. 方程 $y^3 + \ln y - x^2 = 0$ 在点 $(1, 1)$ 的某邻域确定隐函数 $y=y(x)$, 则 $\frac{dy}{dx}|_{x=1} =$ _____.

三、解答题 (21~28 题, 共 70 分。解答应写出推理、演算步骤)

21、(本题满分 8 分)

计算 $\int x \sin x dx$.

22、(本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x}$.

23、(本题满分 8 分)

已知函数 $f(x) = e^x \cos x$, 求 $f''(\frac{\pi}{2})$.

24、(本题满分 8 分)

计算 $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx$.

25、(本题满分 8 分)

设 D 为曲线 $y=\sqrt{x}$, 直线 $x=4$, x 轴围成的有界区域, 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

26、(本题满分 10 分)

求函数 $z=x^2 + 2y^4 + 4xy^2 - 2x$ 的极值。

27、(本题满分 10 分)

求曲线 $y=x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ 的凹凸区间与拐点。

28、(本题满分 10 分)

已知离散型随机变量 X 的概率分布为

X	-1	0	2
P	a	0.5	b

且 $E(X) = 0$.

(1) 求 a, b ;

(2) 求 $E[X(X+1)]$

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】B

【考情点拨】本题考查了函数极限的知识点。

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x} \cdot \frac{2}{3}} = [\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}$.

2. 【答案】B

【考情点拨】本题考查了函数微分的知识点。

【应试指导】 $y' = (x+2\sin x)' = 1+2\cos x$, 故 $dy = y'dx = (1+2\cos x)dx$.

3. 【答案】A

【考情点拨】本题考查了分式函数的极限的知识点。

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x^2-x+2} = \frac{1^2+1+1}{1^2-1+2} = \frac{3}{2}$

4. 【答案】D

【考情点拨】本题考查了一阶导数的知识点。

【应试指导】 $f'(x) = (3+x^5)' = 5x^4$

5. 【答案】B

【考情点拨】本题考查了二阶导函数的知识点。

【应试指导】 $f'(x) = (2\ln x)' = \frac{2}{x}$, $f''(x) = (\frac{2}{x})' = -\frac{2}{x^2}$

6. 【答案】A

【考情点拨】本题考查了牛顿--莱布尼兹公式的知识点。

【应试指导】 $\int_{-2}^2 (1+x)dx = (x + \frac{1}{2}x^2)|_{-2}^2 = 4$

7. 【答案】C

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点

【应试指导】 $\int \frac{3}{x^5} dx = 3 \times \frac{1}{-5+1} x^{-5+1} + C = -\frac{3}{4x^4} + C$

8. 【答案】A

【考情点拨】本题考查了随机事件的概率的知识点

【应试指导】2本英语书恰好相邻的概率为 $\frac{A_4^4 \cdot A_2^2}{A_5^5} = \frac{2}{5}$

9. 【答案】D

【考情点拨】本题考查了全微分的知识点

【应试指导】易知 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -8y$, 故 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2x dx - 8y dy$

10. 【答案】C

【考情点拨】本题考查了函数的偏导数的知识点

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot (y^2)' = 2xy$

二、填空题

11. 【答案】 $2e^{2x} dx$

【考情点拨】本题考查了函数微分的知识点

【应试指导】 $y' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$, 故 $dy = y'dx = 2e^{2x}dx$

12. 【答案】 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

【考情点拨】本题考查了函数的单调性知识点

【应试指导】易知 $f'(x) = 3x^2 - 6$, 令 $f'(x) < 0$, 则有 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, 故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

13. 【答案】-2

【考情点拨】本题考查了分段函数连续性的知识点

【应试指导】由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故有 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, 而 $f(0) = -2$,

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 2) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + \sin x) = a$, 因此 $a = -2$

14. 【答案】1

【考情点拨】本题考查了函数极限的知识点

【应试指导】 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 \rightarrow 0$, 故有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$

15. 【答案】 $\frac{3}{2}x^2 - 2\cos x + C$

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点

【应试指导】 $\int (3x + 2\sin x)dx = \frac{3}{2}x^2 - 2\cos x + C$

16. 【答案】 $\frac{3}{2}$

【考情点拨】本题考查了函数切线的知识点

【应试指导】 $y' = [\arctan(3x + 1)]' = \frac{3}{1 + (3x + 1)^2}$, 故曲线在点 $(0, \frac{\pi}{4})$ 处的切线斜率为

$$y'|_{x=0} = \frac{3}{1 + (3x + 1)^2} \Big|_{x=0} = \frac{3}{2}$$

17. 【答案】 $2\sin(4x^2)$

【考情点拨】本题考查了定积分的性质的知识点

【应试指导】 $(\int_0^{2x} \sin t^2 dt)' = \sin(2x)^2 \cdot (2x)' = 2\sin(4x)^2$

18. 【答案】e

【考情点拨】本题考查了反常积分的知识点

【应试指导】 $\int_{-\infty}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-\infty}^1 = e - 1 = e$

19. 【答案】 $\frac{4}{3}$

【考情点拨】本题考查了定积分的应用的知识点

【应试指导】区域 D 的面积为 $\int_1^2 (x^2 - 1) dx = (\frac{1}{3}x^3 - x) \Big|_1^2 = \frac{4}{3}$

20. 【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】本题考查了隐函数求导的知识点

【应试指导】方程两边对 x 求导, 得 $3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} - 2x = 0$, 即 $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{3y^3 + 1}$, 故有 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} =$

$$\frac{xy}{3y^3+1}|_{x=1} = \frac{2 \times 1 \times 1}{3 \times 1^3 + 1} = \frac{1}{2}$$

三、解答题

$$21. \int x \sin x dx = - \int x d(\cos x) = - (x \cos x - \int \cos x dx) = - x \cos x + \int \cos x dx = - x \cos x + \sin x + C$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{2 x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 x^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$23. f'(x) = e^x \cos x + e^x \cdot (\cos x)' = e^x \cos x + e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x),$$

$$f''(x) = e^x (\cos x - \sin x) + e^x (\cos x - \sin x)' = e^x (\cos x - \sin x) + e^x (-\sin x - \cos x) = -2e^x \sin x$$

$$\text{故有 } f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} = -2e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$24. \int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{3}} d(x+1) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} (1+x)^{\frac{1}{3}+1} \Big|_0^1 = \frac{3}{4} (1+x)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 = \frac{3}{4} (2^{\frac{4}{3}} - 1)$$

$$25. \text{区域 } D: 0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 4,$$

$$\text{故所求旋转体的体积} = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 - \int_0^2 \pi x^2 dy = 32\pi - \int_0^2 \pi y^4 dy = 32\pi - \frac{\pi}{5} y^5 \Big|_0^2 = \frac{128}{5} \pi$$

$$26. \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y^2 - 2, \frac{\partial z}{\partial y} = 8y^3 + 8xy,$$

$$\text{令 } \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$\text{得驻点为 } (1, 0), (1, 1), (-1, -1)$$

$$\text{而 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24y^2 + 8x,$$

$$\text{在 } (1, 0) \text{ 点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,0)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,0)} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(1,0)} = 8$$

$$B^2 - AC = -16 < 0, \text{ 且 } A > 0,$$

故函数在 $(1, 0)$ 点有极小值, $z_{\text{极小值}} = -1$;

$$\text{在 } (1, 1) \text{ 点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} = 8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(1,1)} = 16,$$

$$B^2 - AC = 32 > 0, \text{ 故点 } (1, 1) \text{ 不是极值点};$$

$$\text{在 } (-1, -1) \text{ 点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1,-1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1,-1)} = -8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1,-1)} = 16$$

$$B^2 - AC = 32 > 0, \text{ 故点 } (-1, -1) \text{ 不是极值点}.$$

因此函数在 $(1, 0)$ 点有极小值, $z_{\text{极小值}} = -1$

$$27. y' = 3x^2 - 6x + 2, y'' = 6x - 6,$$

$$\text{令 } y'' = 0, \text{ 得 } x = 1.$$

当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$, 故 $(1, +\infty)$ 为曲线的凹区间;

当 $x < 1$ 时, $y'' < 0$, 故 $(-\infty, 1)$ 为曲线的凸区间,

函数的拐点为 $(1, 1)$.

$$28. (1) \text{ 由概率的性质可知 } a + 0.5 + b = 1,$$

$$\text{又 } E(X) = 0, \text{ 得 } -1 \times a + 0 \times 0.5 + 2 \times b = 0,$$

故有 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{6}$

$$(2) E[X(X+1)] = E(X^2 + X) = E(X^2) + E(X),$$

$$\text{而 } E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \frac{1}{3} \cdot (-1 - 0)^2 + \frac{1}{2} \cdot (0 - 0)^2 + \frac{1}{6} \cdot (2 - 0)^2$$

$$\text{因此 } E[X(X+1)] = 1 + 0 = 1$$