

5. 已知 θ 是第三象限角, 且 $\sin^4\theta + \cos^4\theta = \frac{5}{9}$, 那么 $\sin 2\theta$ 等于 ()

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

B. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $-\frac{2}{3}$

6. 与函数 $y = x$ 有相同图象的一个函数是 ()

A. $y = \sqrt{x^2}$

B. $y = \frac{x^2}{x}$

C. $y = a^{\log_a x} (a > 0, a \neq 1)$

D. $y = \log_a a^x (a > 0, a \neq 1)$

7. 命题甲: $|x| > 5$, 命题乙: $x < -5$, 则 ()

A. 甲是乙的充分条件, 但不是乙的必要条件

B. 甲是乙的必要条件, 但不是乙的充分条件

C. 甲是乙的充分必要条件

D. 甲既不是乙的必要条件, 也不是乙的充分条件

8. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 40, 前 $2n$ 项和为 120, 则前 $3n$ 项和为 ()

A. 240

B. 120

C. 260

D. 250

9. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 4, a_{11} = 16$, 则 $a_7 =$ ()

A. 10

B. 12

C. 8

D. 18

10. 已知直线 $l_1: 2x - 4y = 0, l_2: 3x - 2y + 5 = 0$, 过 l_1 与 l_2 的交点且与 l_1 垂直的直线方程是 ()

A. $8x - 4y + 25 = 0$

B. $8x + 4y + 25 = 0$

C. $8x - 4y - 25 = 0$

D. $8x + 4y - 25 = 0$

11. 已知复数 $z = (m^2 - m - 2) + (m^2 - 3m + 2)i$ 对应点位于复平面实轴上, 那么 $m =$ ()

A. 1

B. 1 或 2

C. 2

D. 0

12. 某校有 5 位校长, 要外出参加 4 个不同的会议, 要求一位校长在校主持日常工作, 安排方案共有 ()

A. 720(种)

B. 36(种)

C. 24(种)

D. 120(种)

13. 设 $a < b < 0, c \in \mathbf{R}$, 则下列各式中一定成立的是 ()

A. $b^2 > a^2$

B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

C. $|a| > -b$

D. $ac^2 < bc^2$

14. 过点 $(1, 2)$, 倾斜角 α 的正弦值为 $\frac{4}{5}$ 的直线方程是 ()

A. $4x - 3y + 2 = 0$

B. $4x + 3y - 6 = 0$

C. $3x - 4y + 6 = 0$

D. $y = \pm \frac{4}{3}(x - 1) + 2$

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b = 2\sqrt{2}, c = 4, B = 30^\circ$, 则角 C 等于 ()

A. 45°

B. 45° 或 135°

C. 30°

D. 30° 或 150°

16. 圆 $\begin{cases} x = -1 + 2\cos\theta \\ y = 2 + 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 的圆心坐标和半径分别是 ()

A. $(-1, 2), 2$

B. $(1, -2), 2$

C. $(-1, 2), 4$

D. $(1, -2), 4$

17. 把砵山梨、雪花梨、香蕉、甜橙、苹果、橘子共 6 个水果随意地平分给甲、乙、丙三个小孩, 那么小孩甲正好分得两个梨的概率是 ()

A. $\frac{1}{15}$

B. $\frac{1}{30}$

C. $\frac{1}{60}$

D. $\frac{1}{90}$

得分	评卷人

二、填空题: 本大题共 4 小题; 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

18. 已知 $|a| = 5, |b| = 4, a$ 与 b 的夹角 $\theta = 120^\circ$, 则 $a \cdot b =$ _____.

19. 球的内接正方体边长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 则这个球的表面积等于 _____.

20. 从某班的一次数学测验试卷中取出 10 张作为一个样本, 记录试卷的得分如下:

86 91 100 72 93 89 90 85 75 95

样本平均数 $\bar{x} =$ _____.

21. 不等式 $\frac{4 + 2x}{(1 + x)^2} > 0$ 的解集为 _____.

得分	评卷人

三、解答题：本大题共 4 小题，共 49 分，解答应写出推理、演算步骤.

22. 本小题满分 12 分

已知等差数列的前 n 项和 $S_n = 2n^2 - n$.

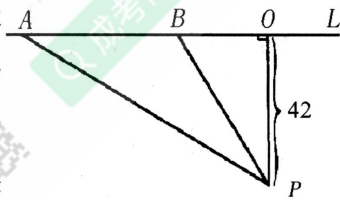
- (i) 求这个数列的通项公式；
- (ii) 求这个数列第六项到第十项的和.

23. 本小题满分 12 分

求函数 $y = \sqrt{3} \cos^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x$ 的最大值、最小值.

24. 本小题满分 12 分

如图：已知测速站 P 到高速公路 L 的距离为 42m，一辆汽车在公路 L 上行驶，测得此车从 A 点行驶到 B 点所用的时间为 2s，并测得 $\angle APO = 64^\circ$ ， $\angle BPO = 32^\circ$ ，计算此车从 A 到 B 的平均速度为多少千米 / 时(结果保留到个位)，并判断此车是否超过了 100km/h 的限制速度。(已知 $\cot 64^\circ = 0.4877$ ， $\cot 32^\circ = 1.6003$)



25. 本小题满分 13 分

已知双曲线方程 $4x^2 - y^2 = 1$.

(i) 求以该双曲线的实轴和虚轴分别为短轴和长轴的椭圆方程.

(ii) 求证: 当与直线 $y = x - 3$ 平行的直线被椭圆截取的弦最长时, 此直线被双曲线截取的弦最短, 并求此直线方程被椭圆截取的最长弦长和被双曲线截取的最短弦长.

52. How old are you? 53. Where are you from/Where do you come from

54. Thanks/Thank you

55. Where is she

六、书面表达

Dear Peter,

How is everything going with you?

Thank you so much for inviting me to your weekend party on Friday evening. However, I'm afraid I won't be able to attend it, because I'm now on a business trip in Nanjing. And I won't be back until this Saturday evening. I feel really sorry that I can't join you this time. But I'd like to visit you when I go back from Nanjing. Please let me know what time suits you best.

Wish you a good time on Friday and look forward to seeing you soon!

Yours,

Li Hua

数学(理工农医类)全真模拟试卷(一) 参考答案

一、

1. C

2. D

3. B

4. C

5. A

6. D

7. B

8. A

9. A

10. B

11. B

12. D

13. C

14. D

15. B

16. A

17. A

二、

18. -10

19. 4π

20. 87.6

21. $x > -2$, 且 $x \neq -1$

三、

22. 解:(i) 当 $n \geq 2$ 时

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 - n) - [2(n-1)^2 - (n-1)] = 4n - 3 \quad (n \geq 2),$$

当 $n=1$ 时

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 1 = 1 = 4 \times 1 - 3$$

$$\therefore a_n = 4n - 3 (n \in \mathbf{N}^*)$$

$$(ii) S_{10} - S_5 = (2 \times 10^2 - 10) - (2 \times 5^2 - 5) = 145$$

$$\begin{aligned} 23. \text{解: 原式} &= \sqrt{3} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \sin 2x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(2x + \frac{\pi}{3}) \\ \therefore y_{\max} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + 1, y_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24. \text{解: } AB &= AO - BO \\ &= 42 \tan 64^\circ - 42 \tan 32^\circ \\ &= \frac{42}{\cot 64^\circ} - \frac{42}{\cot 32^\circ} \\ &= \frac{42}{0.4877} - \frac{42}{1.6003} \\ &= 86.1185 - 26.2451 \\ &= 59.8734 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以速度 } v &= \frac{59.8734}{2} \times \frac{3600}{1000} \\ &= 107.7721 \\ &\approx 108(\text{km/h}) \end{aligned}$$

答: 此车从 A 到 B 平均速度约为 108km/h, 已经超过了 100km/h 的限制速度.

$$25. \text{解: (i) 双曲线方程化为 } \frac{x^2}{\frac{1}{4}} - y^2 = 1$$

$$\text{则 } a^2 = \frac{1}{4}, b^2 = 1$$

因为椭圆的短轴是双曲线的实轴, 长轴是双曲线的虚轴.

$$\text{所以 } b'^2 = \frac{1}{4}, a'^2 = 1$$

$$\text{所以椭圆方程为 } \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{1} = 1$$

$$\text{即 } 4x^2 + y^2 = 1$$

(ii) 设直线方程为 $y = x + t$ 与椭圆交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$\text{则 } \begin{cases} y = x + t & \text{①} \\ 4x^2 + y^2 = 1 & \text{②} \end{cases}$$

把①代入② 整理得 $5x^2 + 2tx + t^2 - 1 = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{2t}{5}, x_1 \cdot x_2 = \frac{t^2 - 1}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |AB| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + t - x_2 - t)^2} \\ &= \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} \\ &= \sqrt{2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2 \left[\left(-\frac{2t}{5}\right)^2 - 4 \frac{t^2 - 1}{5} \right]} \\
 &= \frac{2}{5} \sqrt{10 - 8t^2}
 \end{aligned}$$

当 $t=0$ 时, $|AB|$ 有最大值 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

又设直线 $y=x+t$ 与双曲线交于 $C(x_3, y_3)$ 和 $D(x_4, y_4)$

$$\begin{cases} y = x + t & \text{③} \\ 4x^2 - y^2 = 1 & \text{④} \end{cases}$$

把 ③ 代入 ④, 整理得 $3x^2 - 2tx - t^2 - 1 = 0$

$$x_3 + x_4 = \frac{2t}{3}, x_3 \cdot x_4 = \frac{-t^2 - 1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } |CD| &= \sqrt{(x_3 + x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2} \\
 &= \sqrt{2(x_3 - x_4)^2} \\
 &= \sqrt{2[(x_3 + x_4)^2 - 4x_3x_4]} \\
 &= \frac{2}{3} \sqrt{8t^2 + 6}
 \end{aligned}$$

所以当 $t=0$ 时, $|CD|$ 有最小值 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

所以直线 $y=x$ 被椭圆所截的弦最长, 弦长为 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

同时被双曲线所截的弦最短, 弦长为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$