专升本高等数学科目
题型及考情分析

一、高等数学科目题型分析

高等数学作为成人高考专升本经管类（高数二）、理工类（高数一）专业考察科目，二者考试的题型都相同，包括如下表所示：

题型	题数	每题分值	总共分值
一、选择题	共 10 小题	4 分	40 分
二、填空题	共 10 小题	4 分	40 分
三、解答题	共 8 小题	8-10 分	70 分

二、高等数学科目考情分析

（一）、考试比重分析

数学科目总分为 150 分，其中单选题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.填空题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。简答题共 8 小题，每小题 8-10 分，共 70 分。

不管是从年份，还是从省份来看，专升本经管类、理工科的录取分数线一般都是维持在 100-130 分左右，所以我们参考的学生只要三科总分达到 150 分以上，平均到每门科目上只需要 50 分，考过是没有问题的。高等数学这门科目，对于很多参考的学员来说是一座大山，很多学员数学基础都相对比较差，考试基本考蒙，甚至是不写，直接填完选择题就交卷，战略上完全放弃了这门科目，其实这种方法是不可取的，高等数学这门科目实际在学习的过程中你会发现，完全是可以拿到高分的，最怕的是还没开始就打退堂的学员，因为成人高考作为一种基本的水平性的测试，试卷考察的内容都比较浅显和简单。只要用心、静心、耐心去学，不愁拿不到高分。通过高等数学的直播课会教大家，常考的题型和对应的解题思路，直播课下来，你会发现有不一样的收获。

（二）、考点分析

由于高数一和高数二在大体知识点上差异不大，所以我们会放在一起去讲，只有个别细微的知识点我们会单独标出，比如概率分布就是高数二的学员要考察，而高数一的学员不需要考察，大家只要对考点熟悉，常用的定理、公式记住，那么做题就很轻松，因为每年基本的题目分值就占到了 110-120 分，所以基础的题目把握了，考试就很轻松了。那么我们一起来看下考试的知识点。

三、高等数学各部分考情分析

（一）单项选择题

本部分共计 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，下面我们一起梳理单项选择题的考试知识点和真题解析。高等数学的选择题相对来说考的知识点比较浅显，所以大家在复习的过程中要以基础知识点为主，切莫钻牛角尖，去研究很难很偏的题目，只要做好基础知识点的掌握，这个板块大家是可以拿到 30-36 分的。

首先，我们来看选择题的第一个考点，这个考点是高频考点，选择题考了就会考一个，了解以下知识点，可以帮你快速突破这个选择题。

（1）考察无穷小量及无穷大量定义及性质

无穷小量定义：对于函数 y=f(x),如果自变量 x 在某个变化过程中，函数 f(x)的极限为 0，则称在该变化过程中，f(x)为无穷小量，一般记作

$$\lim f(x)=0$$

即在一般情况下，极限号下的变化过程可以省略，但如果指出了具体的变化过程（如 x→...），则应注明变化过程.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0 \text{或} \lim_{x\to x_0} f(x)=0$$

注意：

①不要把一个很小很小的数误认为是无穷小量.

②无穷小量是一个变量，是在某个变化过程中以 0 为极限的变量，即在某个变化过程中，变量的绝对值可以无限地变小，且以 0 为极限.

③不要笼统地说某个变量是无穷小量，必须说明在什么变化过程中它是无穷小量.

无穷大量定义：对于函数 y=f(x),如果自变量 x 在某个变化过程中，函数 f(x)的极限值越来越大，称在该变化过程中，f(x)为无穷大量，一般记作

$$\lim f(x)=\infty$$

即在一般情况下，极限号下的变化过程可以省略，但如果指出了具体的变化过程（如 x→...），则应注明变化过程.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \text{或} \lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$$

无穷小量的性质：

性质 1 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

性质 2 无穷小量与有界变量的积仍是无穷小量.

例如：

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} = 0$$

$\lim\limits_{x\to 0} x$（无穷小量）.$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$（有界变量）$=0$（无穷小量）

无穷小量与无穷大量的关系：

在同一变化过程中，如果$f(x)$为无穷大量，且$f(x)\neq 0$.

则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小量；反之，如果$f(x)$为无穷小量，且$f(x)\neq 0$.

则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大量。

例如:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty, \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0, \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.当$x\to 0$时，下列变量是无穷小量的为（）

$A.\dfrac{1}{x^2}\ B.2^x\ C.\sin x\ D.\ln(x+e)$

【答案解析】只要根据定义，看当$x\to 0$时，那个函数的极限值为0，即是答案.

$A:\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$

$B:\lim\limits_{x\to 0}2^x=1$

$C:\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$

$D:\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+e)=1$

所以正确答案为C.

2.下列变量在给定的变化过程中是无穷小量的是（）

$A.\dfrac{\sin x}{x}(x\to 0)B.2^{-x}-2(x\to 0)C.\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}(x\to +\infty)D.x.\sin\dfrac{1}{x}(x\to 0)$

【答案解析】

$A:\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$B:\lim\limits_{x\to 0}2^{-x}-2=-1$

$C:\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}}=1$

$D:\lim\limits_{x\to 0}x.\sin\dfrac{1}{x}=0$

所以正确答案为$D.$

接下来，我们来看选择题的第二个考点，这个考点也是高频考点，选择题考了就会考一个，了解以下知识点，可以帮你快速突破这个选择题。

（2）考察无穷小量的比较及替换

定义：设α，β是同一变化过程中的无穷小量，即

$\lim\alpha=0,\lim\beta=0$

(1)如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称$\beta$是比$\alpha$较高阶的无穷小量，记作$\beta=o$（$\alpha$）

(2)如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 1$，则称$\beta$是与$\alpha$同阶的无穷小量.

(3)如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称$\beta$与$\alpha$是等价的无穷小量.

(4)如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称$\beta$是比$\alpha$较低阶的无穷小量.

等价无穷小的代换：

设$a\sim a',b\sim b'$,则$\lim\dfrac{a}{b}=\lim\dfrac{a'}{b'}$

在求极限的过程中，经常用到下列一些等价的无穷小量

当$x\to 0$时,$x\sim \sin x\sim \tan x\sim \arcsin x\sim \arctan x\sim e^x-1\sim \ln(1+x)$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.当$x \to 0$时，$x + x^2 + x^3 + x^4$为x的

A.等价无穷小 B.2阶无穷小

C.3阶无穷小 D.4阶无穷小

【答案解析】

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + x^2 + x^3 + x^4}{x} = \lim_{x \to 0}(1 + x + x^2 + x^3) = 1$$

$\Rightarrow$ 当$x \to 0$时，$x + x^2 + x^3 + x^4$为x的等价无穷小

$\Rightarrow A$

2.当$x \to 0$时，下列各无穷小量中 与x^2等价的是（）

$A.x\sin^2 x B.x\cos^2 x C.x\sin x D.x\cos x$

【答案解析】只要根据 定义，看当$x \to 0$时，x^2与那个函数相比的极限 值为1，即是与x^2等价的.

$$A: \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin^2 x} = 0$$

$$B: \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x\cos^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\cos^2 x} = \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos^2 x} = 0$$

$$C: \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$D: \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\cos x} = 0$$

所以正确答案为C.

3.设$b \neq 0$，当$x \to 0$时,$\sin bx$是x^2的（）

A.高阶无穷小量 B.等价无穷小量 C.同阶但不等价无穷小量 D.低阶无穷小量

【答案解析】

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin bx}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{bx}{x^2} \text{(等价无穷小替换）}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{b}{x} = b \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

$$= \infty$$

所以正确答案为D.

4.当$x \to 0$时，$\sin 3x$是$2x$的（）

A.低阶无穷小量 B.等价无穷小量 C.同阶但不等价无穷小量 D.高阶无穷小量

【答案解析】

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2} \neq 1 \text{(等价无穷小替换)}$$

所以正确答案为 C.

第三个考点相对来说在选择题里面出来的可能性也比较大，主要牵涉到重要极限及变形。

（3）两个重要极限

$$(1) \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

扩充一般形式

$$\lim_{\partial(x) \to 0} \frac{\sin(x)}{\partial(x)} = 1$$

$$(2) \lim_{n \to \infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$$

$$\lim_{x \to \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$$

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

也可扩充为一般形式

$$\lim_{\partial(x) \to \infty} \left[1+\frac{1}{\partial(x)}\right]^{\partial(x)} = e$$

$$\lim_{\partial(x) \to 0} \left[1+\partial(x)\right]^{\frac{1}{\partial(x)}} = e$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

$$1.\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x}=()$$

$A.e B.e^{-1} C.e^{2} D.e^{-2}$

【答案解析】

重要极限（ 2）

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}.2}=e^{2}$$

答案： C

$$2.\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x}=()$$

$A.e B.e^{-1} C.e^{2} D.e^{-2}$

【答案解析】

重要极限（2）

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}.2}=e^{2}$$

答案： C

$$3.\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{2x}=()$$

$A.e^{-2} B.e^{-1} C.e D.e^{2}$

【答案解析】

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{2x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x.2}=e^{2}$$

答案选D

$$4.\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{2}x}{x^{2}}=$$

$A.0 B.1 C.2 D.\infty$

【答案解析】

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{2}x}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{2}=1$$

答案选B

第四个考点相对来说在选择题里面是必考点，主要牵涉到求极限得几种方法。

（4）求极限方法

①直接带入法：分母不为零的可以通过极限的四则运算法则直接带入求解。

函数极限的四则运算定理：

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x).g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x).\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A.B$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$时，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{A}{B}$$

②利用无穷小量的性质求极限（前面已讲）

③利用等价无穷小量代换求极限（前面已讲）

④利用两个重要极限求极限（前面已讲）

⑤洛必达求导法则（导数部分详细叙述）

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

$1.\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x+2}{x^2-2}=$______

$A.0\quad B.1\quad C.2\quad D.3$

【答案解析】C

这里由于分母不为零，所以直接把$x=1$代入

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-5x+2}{x^2-2}=\frac{1-5+2}{1-2}=2$$

$2.\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2+1}=$______

$A.0\quad B.\dfrac{1}{2}\quad C.1\quad D.2$

【答案解析】A

这里由于分母不为零，所以直接把$x=-1$代入

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2+1}=\frac{-1+1}{1+1}=0$$

第五个考点相对来说在选择题里面是高频点，主要考察函数在某一点的连续性。

（5）函数连续性

①函数在某一点上的连续性

定义1：设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，如果有自变量Δx（初值为x_0）趋近于0时，相应的函数改变量Δy也趋近于0，即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$

则称函数$y=f(x)$在点x_0处连续.

定义2：设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，如果当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限值存在，且等于x_0处的函数值$f(x_0)$，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

则称函数$y=f(x)$在点x_0处连续.

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.若函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$在$x=0$处连续，则常数$a=(\ )$

$A.0\ B.\frac{1}{2}\ C.1\ D.2$

【答案解析】B

运用定义（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}e^{-x}=f(0)=a$

$\frac{1}{2}=a$

2.设函数$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ x+a, & x\geq 0\end{cases}$在$x=0$处连续，则$a=(\ )$

$A.-1\ B.0\ C.1\ D.2$

【答案解析】C

连续定义：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x+a)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^x$

$0+a=e^0=1$

$a=1$

第六个考点相对来说在选择题里面是高频考点，主要牵涉到导数定义公式及变形公式。

（6）导数定义公式

设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，若自变量x在点x_0处的改变量为Δx（$x_0+\Delta x$仍在该领域内）.函数$y=f(x)$相应地有改变量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$存在

则此极限值为函数$y=f(x)$在点x_0处的导数.记作$y'\big|_{x=x_0}$，$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$或$f'(x_0)$.$f$

$$即f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.下列函数中，在$x=0$处不可导的是（）

$A.y=\sqrt[3]{x^5}$ $B.y=\sqrt[5]{x^3}$ $C.y=\sin x$ $D.y=x^2$

【答案解析】B

当$x=0$处可导$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$的极限值存在.

$$A:\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{5}{3}}}{x}=x^{\frac{2}{3}}=0$$

$$B:\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{3}{5}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{2}{5}}}=+\infty$$

$$C:\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$D:\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$$

2.设函数$f(x)$可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(1+x)-f(1)}=2$，则$f'(1)=(\ )$

$A.2B.1C\dfrac{1}{2}D0$

【答案解析】C

$$f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(1+x)-f(1)}}=\frac{1}{2}$$

3.设函数$f(x)$在$x=1$处可导，且$f'(1)=2$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{x}=(\ )$

$A.-2B.-\dfrac{1}{2}C.\dfrac{1}{2}D.2$

【答案解析】A

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{1-x-1}=-f'(1)=-2$$

4.设函数$f(x)$在点x_0的某个领域内可导，且$f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=(\ )$

$A.-2B.0C1D2$

【答案解析】C

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}=2f'(x_0)=2\text{x}\frac{1}{2}=1$$

第七个考点相对来说在选择题里面是高频考点，主要牵涉到导数集合意义求切线方程。

（7）导数的几何意义

导数的几何意义：函数$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$就是曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处的切线斜率.

曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处的切线方程为$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处的法线方程为$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

1.曲线$y=e^{2x}-4x$在点$(0,1)$处的切线方程是（）

$A.2x-y-1=0$ $B.2x+y-1=0$ $C.2x-y+1=0$ $D.2x+y+1=0$

【答案解析】B

切线斜率$k=y'\big|_{x=0}=(2e^{2x}-4)\big|_{x=0}=-2$

即切线方程为$y-1=-2x\Rightarrow y+2x-1=0$

2.曲线$y=x^3+2x$在点（1,3）处的法线方程是

$A.5x+y-8=0$ $B.5x-y-2=0$

$C.x+5y-16=0$ $D.x-5y+14=0$

【答案解析】

$y'=3x^2+2\Rightarrow k_{切}=y'(1)=3+2=5$

法线方程为：$y-3=-\dfrac{1}{k_{切}}(x-1)$

$\Rightarrow x+5y-16=0\Rightarrow C$

第八个考点相对来说在选择题里面是必考点，主要利用基本初等函数公式和导数四则运算法则求导。

（8）求导方法.

①基本初等函数导数公式

1.$(c)'=0$

2.$(x^a)'=ax^{a-1}$

3.$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,且a\neq 1)$

4.$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

5.$(a^x)'=a^x\ln a$

6.$(e^x)'=e^x$

7.$(\sin x)'=\cos x.(\cos x)'=-\sin x$

8.$(\tan x)'=\sec^2 x.(\cot x)'=-\csc^2 x$

9.$(\sec x)'=\sec x.\tan x$/ $(\csc x)'=-\csc x.\cot x$

10.$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1<x<1)$

11.$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1<x<1)$

12.$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

13.$(arc\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

②导数的四则运算法则

1.$(u\pm v)'=u'\pm v'$

2.$(u.v)'=u'.v+u.v'$

3.$(cu)'=cu'$（c为常数）

4.$(\frac{u}{v})'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}(v\neq 0)$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设函数$f(x)=x\ln x$，则$f'(e)=$（）

$A.-1B.0C.1D.2$

【答案解析】D

$f'(x)=\ln x+x.\frac{1}{x}=\ln x+1\Rightarrow f'(e)=\ln\ln x+1+1=2$

2.若函数$f(x)=5^x$,则$f'(x)=$

$A.5^{x-1}B.x5^{x-1}C.5^x\ln 5D.5^x$

【答案解析】

利用基本初等函数求导公式属于指数函数类型

$f'(x)=5^x\ln 5\Rightarrow C$

3.设函数$y=\arcsin x$,则$y'=$

$A.-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}B.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}C.-\frac{1}{1+x^2}D.\frac{1}{1+x^2}$

【答案解析】由于y是基本初等函数里的反三角函数

直接带入公式得$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow B$

③复合函数求导

如果函数$u=\alpha(x)$在点x处可导，函数$y=f(u)$在对应点u处也可导，

则复合函数$y=f[\alpha(x)]$在点x处可导，且有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$y'_x=y'_u.u'_x$$

$$\{f[\alpha(x)]\}'=f'(u)\ u'(x)$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设函数$y=(2+x)^3$,则$y'=()$

$A.(2+x)^2 B.3(2+x)^2 C.(2+x)^4 D.3(2+x)^4$

【答案解析】B

$y=(2+x)^3$

$y'=3(2+x)^2.(2+x)'=3(2+x)^2$

2.设函数$y=\cos 2x$,则$y'=$

$A.2\sin 2x B.-2\sin 2x C.\sin 2x D.-\sin 2x$

【答案解析】

$y'=-\sin 2x.(2x)'=-2\sin 2x\Rightarrow B$

④高阶求导

如果函数$y=f(x)$的导数$y'=f'(x)$仍是x的可导函数，那么就称$f'(x)$的导数为$f(x)$的二阶导数，相应地$f'(x)$称为函数$y=f(x)$的一阶导数.二阶导数记为y''，$f''(x)$，$\frac{d^2y}{dx^2}$或$\frac{d^2f}{dx^2}$

$y''=(y')'$，$f''(x)=[f'(x)]'$或$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$

那么以此类推，$f(x)$得$n-1$阶导数的导数称为$f(x)$的n阶导数

记作$y^{(n)}$或$y^{(n)}(x)$或$\frac{d^ny}{dx^n}$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设函数$y=3x+1$,则$y''=$( )

$A.0 B.1 C.2 D.3$

【答案解析】A

$y=3x+1\Rightarrow y'=3\Rightarrow y''=0$

2.设函数$y=x^3+e^x$,则$y^{(4)}=$

$A.0 B.e^x C.2+e^x D.6+e^x$

【答案解析】

$y'=3x^2+e^x\Rightarrow y''=6x+e^x$

$\Rightarrow y'''=6+e^x\Rightarrow y^{(4)}=e^x$

$\Rightarrow B$

第九个考点相对来说在选择题里面是必考点，主要牵涉到求基本的微分。

（9）微分

微分公式：

(1)d（c）= 0（c为常数）.(2）$d(x^a)=ax^{a-1}dx$

$(3)d(a^x)=a^x\ln adx(a>0,且a\neq1)$

$(4)d(e^x)=e^xdx.(5)d\log_a x=\dfrac{1}{x\ln a}dx(a>0,且a\neq1)$

$(6)d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx.(7)d(\sin x)=\cos xdx$

$(8)d(\cos x)=-\sin xdx$

函数的和、差、积、商微分运算公式

设$u=u(x),v=v(x)$可微分，则

$d(cu)=cdu(c为常数)$；$d(u\pm v)=du\pm dv$

$d(uv)=vdu+udv;d(\dfrac{u}{v})=\dfrac{vdu-udv}{v^2}(v\neq0)$

函数$y=f(x)在x=x_0处的微分$，常记作 $dy|_{x=x_0}$ 或$df(x)|_{x=x_0}$

$\dfrac{dy}{dx}=f'(x)\Rightarrow dy=f'(x)dx$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设函数$y=e^{x-2}$,则$dy=()$

$A.e^{x-3}dxB.e^{x-2}dxC.e^{x-1}dxD.e^xdx$

【答案解析】

$y'=\dfrac{dy}{dx}=e^{x-2}\Rightarrow dy=e^{x-2}dx$

2.$d(\sin 2x)=$___

$A.2\cos 2xdxB.\cos 2xdxC.-2\cos 2xdxD.-\cos 2xdx$

【答案解析】A

令$y=\sin 2x\Rightarrow y'=2\cos 2x\Rightarrow dy=d(\sin 2x)=2\cos 2xdx$

3.若$y=1+\cos x$,则$dy=$

$A.(1+\sin x)dxB.(1-\sin x)dxC.\sin xdxD.-\sin xdx$

【答案解析】

$y'=\dfrac{dy}{dx}=-\sin x\Rightarrow dy=-\sin xdx\Rightarrow D$

第十个考点相对来说在选择题里面是高频考点，主要牵涉到求函数单调性和单调区间。

（10）导数的应用

①函数单调性

设函数$f(x)$在区间(a,b)内可导.

1.如果在区间(a,b)内$f'(x)>0$,则函数$f(x)$在区间(a,b)内是递增的；

2.如果在区间(a,b)内$f'(x)<0$,则函数$f(x)$在区间(a,b)内是递减的。

注：$f(x)$在个别点处$f'(x)=0$不影响$f(x)$的单调性.

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.函数$f(x)=\ln(x^2+2x+2)$的单调递减区间是（）

$A.(-\infty,-1)$ $B.(-1,0)$ $C.(0,1)$ $D.(1,+\infty)$

【答案解析】A

$f'(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}=\dfrac{2x+2}{(x+1)^2+1}$,由于$(x+1)^2+1$恒$\geq 1$

$f'(x)<0\Rightarrow x<-1$，所以单调减区间是（$-\infty,-1$）

2.函数$f(x)=x^3-12x+1$的单调减区间为（）

$A.(-\infty,+\infty)$ $B.(-\infty,-2)$ $C.(-2,2)$ $D.(2,+\infty)$

【答案解析】C

$f'(x)=3x^2-12, f'(x)<0\Rightarrow 3x^2-12<0\Rightarrow -2<x<2$

函数$f(x)$的单调减区间为（$-2,2$）

3.函数$f(x)=x^4-4x$的单调增区间是（）

$A.(-\infty,+\infty)$ $B.(-\infty,0)$ $C.(-1,1)$ $D.(1,+\infty)$

【答案解析】D

$f'(x)=4x^3-4=4(x^3-1)$,令$f'(x)=0$得$x=1$,当$x>1$时，$f'(x)>0$

函数$f(x)$的单调增区间是（$1,+\infty$）

②函数的极值

设$f(x)$在x_0的某领域内有定义.

⑴ 如果$x \neq x_0$时，恒有$f(x) < f(x_0)$则称x_0为极大值点，$f(x_0)$为极大值

⑵ 如果$x \neq x_0$时，恒有$f(x) > f(x_0)$则称x_0为极小值点，$f(x_0)$为极小值

极值存在的必要条件：

设函数$f(x)$在x_0可导，且在点x_0处取得极值，则必有

$f'(x_0) = 0$，称满足$f'(x_0) = 0$的点为函数$f(x)$的驻点，

由此可知，可导函数的极值点必为驻点。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.函数$f(x) = x^3 - 3x$的极小值点为（）

$A.-2B.0C.2D.4$

【答案解析】

$f'(x) = 3x^2 - 3$, 令$f'(x) = 0$，得驻点$x_1 = -1, x_2 = 1$

又$f''(x) = 6x, f''(-1) = -6 < 0, f''(1) = 6 > 0$

所以函数$f(x)$在$x = 1$处取得极小值，$f(1) = -2$

2.设$f'(x_0) = 0$, 则$x = x_0$ _____

$A.$为$f(x)$的驻点$B.$不为$f(x)$的驻点$C.$为$f(x)$的极大值点$D.$为$f(x)$的极小值点

【答案解析】A

使得函数得一阶导数得值为零得点，称为函数得驻点，即$f'(x_0) = 0$得根为驻点

.驻点不一定是极值点。

③曲线的凹凸性及拐点

曲线凹凸性的判别法：

设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在（a,b）内具有一阶和二阶导数，那么

(1) 若在（a,b）内，$f''(x)>0$,则f则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的

(2) 若在（a,b）内，$f''(x)<0$,则f则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的

曲线的拐点：

在连续的曲线上的凹弧与凸弧之间的分界点称为曲线的拐点。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.曲线$y=x^3-3x^2-1$的凸区间是（）

$A.(-\infty,1)$ $B.(-\infty,2)$ $C.(1,+\infty)$ $D.(2,+\infty)$

【答案解析】A

函数得定义域为（$-\infty,+\infty$），$y'=3x^2-6x, y''=6x-6$

令$y''=6x-6<0\Rightarrow x<1$,曲线是凸的。

第十一个考点相对来说在选择题里面是必考点，主要牵涉到求不定积分。

(11)不定积分的性质及公式

区间上$f(x)$的原函数的全体，称为$f(x)$在I上的不定积分记为$\int f(x)\mathrm{d}x$.

如果$F(x)$为$f(x)$的一个原函数，则有$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，其中$C$为任意常数.

不定积分的性质及公式

(1)$\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x), d\int f(x)dx = f(x)dx$

(2)$\int dF(x) = F(x)+C, \int F'(x)dx = F(x)+C$

(3)$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$($k$为常数)

(4)$\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(1)$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C(a \neq -1)$

(2)$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

(3)$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C(a>0, a\neq 1)$

(4)$\int e^x dx = e^x + C$

(5)$\int \sin x dx = -\cos x + C$

(6)$\int \cos x dx = \sin x + C$

(7)$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

(8)$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

(9)$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$

(10)$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + C$

(11)$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

(12)$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

政治、英语、高等数学、医学综合、教育理论

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.下列函数为$f(x)=e^{2x}$的原函数的是（）

$A.e^{x}B.\frac{1}{2}e^{2x}C.e^{2x}D.2e^{2x}$

【答案解析】B

$\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$（$C$为任意常数）

2.设$2x$为$f(x)$得一个原函数，则$f(x)=$

$A.0B.2C.x^{2}D.x^{2}+C$

【答案解析】

由题意可得$\int f(x)dx=2x+C$

$\Rightarrow f(x)=(\int f(x)dx)'=(2x+C)'=2$

$\Rightarrow B$

3.$\int xdx=()$

$A.2x^{2}+CB.x^{2}+CC.\frac{1}{2}x^{2}+CD.x+C$

【答案解析】C

$\int xdx=\frac{1}{2}x^{2}+C$

4.$\int\frac{1}{\sqrt{x^{3}}}dx=()$

$A.\frac{2}{\sqrt{x}}+CB.-\frac{2}{\sqrt{x}}+CC.\frac{2}{5}\sqrt{x^{5}}+CD.-\frac{2}{5}\sqrt{x^{5}}+C$

【答案解析】B

$\int\frac{1}{\sqrt{x^{3}}}dx=\int x^{-\frac{3}{2}}dx=-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$

5.$\int(x^{-2}+\sin x)dx=()$

$A.-2x^{-1}+\cos x+CB.-2x^{-3}+\cos x+CC.-\frac{x^{-3}}{3}-\cos x+CD.-x^{-1}-\cos x+C$

【答案解析】D

$\int(x^{-2}+\sin x)dx=\int x^{-2}dx+\int\sin xdx=-x^{-1}-\cos x+C$

6.$\int \frac{1}{2-x}dx=$

$A.\ln|2-x|+C$ $B.-\ln|2-x|+C$

$C.-\frac{1}{(2-x)^2}+C$ $D.\frac{1}{(2-x)^2}+C$

【答案解析】

$\int \frac{1}{2-x}dx=-\ln|2-x|+C\Rightarrow B$

7.设函数$f(x)=\arctan x$,则$\int f'(x)dx=$

$A.-\arctan x+C$ $B.-\frac{1}{1+x^2}+C$

$C.\arctan x+C$ $D.\frac{1}{1+x^2}+C$

【答案解析】

$\int f'(x)dx=f(x)+C=\arctan x+C\Rightarrow C$

8.$\frac{d}{dx}\int \frac{1}{1+x^2}dx=$

$A.\arctan x$ $B.arc\cot x$ $C.\frac{1}{1+x^2}$ $D.0$

【答案解析】

$\frac{d}{dx}\int \frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow C$

第十二个考点相对来说在选择题里面是一般考点，一般考察解答题，选择题里很少。

(12)求不定积分的常用方法

一、换元积分法（凑微分法）

设$f(u)$有原函数$F(u)$，且$u=v(x)$,则$F[v(x)]$是$f[v(x)]v'(x)$的原函数，即有：

$$\int f[v(x)]v'(x)dx=F[v(x)]+C$$

二、分部积分法

设u、v都是x的可微函数，则有

$$\int udv=uv-\int vdu$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.$\int x\cos x^2dx=()$

$A.-2\sin x^2+C$ $B.-\frac{1}{2}\sin x^2+C$ $C.2\sin x^2+C$ $D.\frac{1}{2}\sin x^2+C$

【答案解析】D

$$\int x\cos x^2dx=\frac{1}{2}\int\cos x^2dx^2=\frac{1}{2}\sin x^2+C$$

2.$\int x^2e^{x^3}dx=()$

$A.\frac{1}{3}x^2e^{x^3}+C$ $B.3x^2e^{x^3}+C$ $C.\frac{1}{3}e^{x^3}+C$ $D.3e^{x^3}+C$

【答案解析】 C

$$\int x^2e^{x^3}dx=\frac{1}{3}e^{x^3}dx^3=\frac{1}{3}e^{x^3}+C$$

3.$\int f'(2x)dx=$

$A.\frac{1}{2}f(2x)+C$ $B.f(2x)+C$ $C.2f(2x)+C$ $D.\frac{1}{2}f(x)+C$

【答案解析】

$$\frac{1}{2}\int f'(2x)d(2x)=\frac{1}{2}f(2x)+C\Rightarrow A$$

4.$\int\cos 2xdx=$

$A.\frac{1}{2}\sin 2x+C$ $B.-\frac{1}{2}\sin 2x+C$

$C.\frac{1}{2}\cos 2x+C$ $D.-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

【答案解析】

$$\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\cos 2xd(2x)=\frac{1}{2}\sin 2x+C\Rightarrow A$$

第十三个考点相对来说在选择题里面是必考点，主要牵涉到求定积分。

（13）定积分

$\int_a^b f(x)dx$称$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

其中$f(x)$称为被积函数，$f(x)dx$称为被积表达式，x称为积分变量,$[a,b]$称为积分区间，a称为积分下限，b称为积分上限.

注意：

(1) 定积分若存在，它只是一个确定的常数，它只与被积函数$f(x)$及积分区间$[a,b]$有关，而与积分变量的符号无关，即应有$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$.

(2) 定积分$\int_a^b f(x)dx$中，上下限的大小没有限制，但若颠倒积分上下限，必须改变定积分的符号，即$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.特别地有$\int_a^a f(x)dx=0$

1.常数可以提到积分号之外，即若k为常数，则有$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

2.两函数代数和的定积分等于它们的定积分的代数和即有$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$
可以推广到有限个函数的代数和的情况

3.定积分的可加性：如果积分区间$[a,b]$被点c分成两个
小区间$[a,c]$与$[c,b]$，则有$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

4.如果在区间$[a,b]$上，总有$f(x)\le g(x)$,则有$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

牛顿—莱布尼茨公式

如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上任意一个原函数则有

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

政治、英语、高等数学、医学综合、教育理论

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.若$\int_0^1(2x+k)dx=1$,则常数$k=()$

$A.-2 B.-1 C.0 D.1$

【答案解析】

$\int_0^1(2x+k)dx=(x^2+kx)\Big|_0^1=1+k=1\Rightarrow k=0$

2.$\int_0^1 2^x dx=()$

$A.\ln 2 B.2\ln 2 C.\frac{1}{\ln 2} D.\frac{2}{\ln 2}$

【答案解析】C

$\int_0^1 2^x dx=\frac{1}{\ln 2}2^x\Big|_0^1=\frac{1}{\ln 2}$

3.$\frac{d}{dx}\int_0^x e^t dt=()$

$A.e^x B.e^x-1 C.e^{x-1} D.e^{x+1}$

【答案解析】A

$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$,故$\frac{d}{dx}\int_0^x e^t dt=e^x$

4.$\int_0^1(2x+1)^3 dx=$

$A.-10 B.-8 C.8 D.10$

【答案解析】

$\int_0^1(2x+1)^3 dx=\frac{1}{2}\int_0^1(2x+1)^3 d(2x+1)$

$=\frac{1}{2}.\frac{1}{4}(2x+1)^4\Big|_0^1=10\Rightarrow D$

5.设$I_1=\int_0^1 x^2dx, I_2=\int_0^1 x^3dx, I_3=\int_0^1 x^4dx$,则

$A.I_1>I_2>I_3$　$B.I_2>I_3>I_1$

$C.I_3>I_2>I_1$　$D.I_1>I_3>I_2$

【答案解析】

$I_1=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$; $I_2=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}$; $I_3=\frac{1}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow I_1>I_2>I_3\Rightarrow A$

这题也可采用定积分性质解决

6.若$f(x)$为连续的奇函数，则$\int_{-1}^{1}f(x)dx=$

$A.0$　$B.2$　$C.2f(-1)$　$D.2f(1)$

【答案解析】

因为$f(x)$为连续的奇函数,$\int f(x)dx$必为偶函数

又1与-1互为相反数,$\Rightarrow \int_{-1}^{1}f(x)dx=0\Rightarrow A$

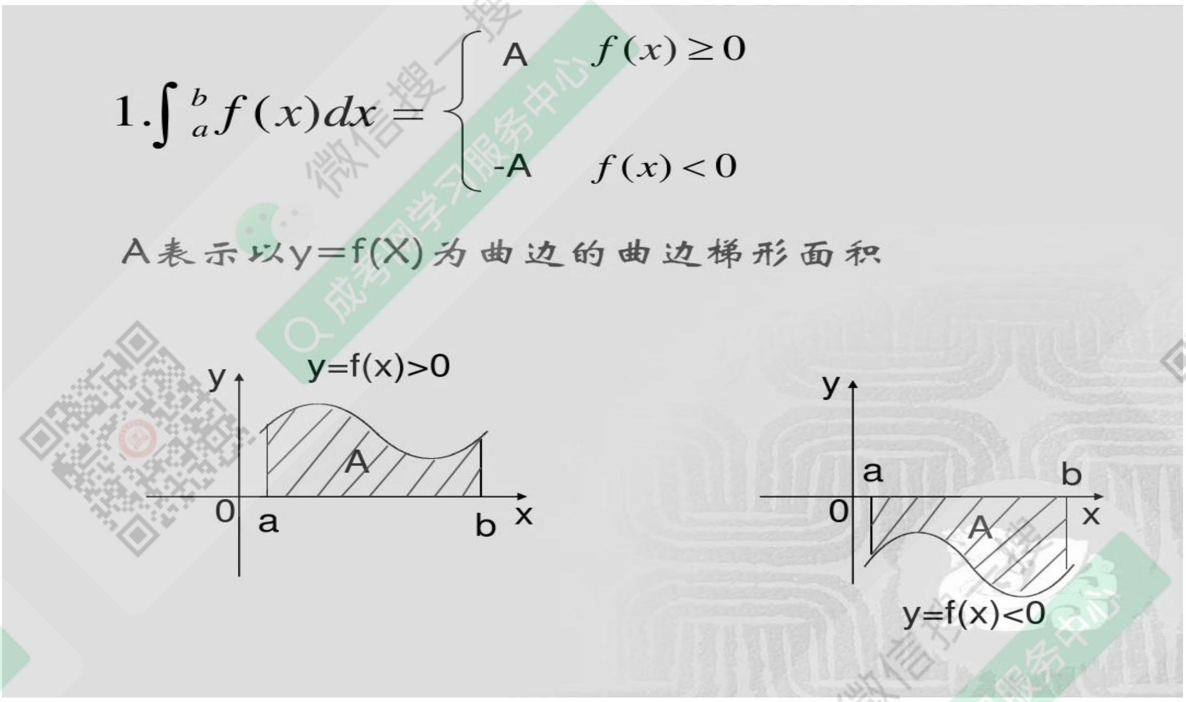
第十四个考点相对来说在选择题里面是普通考点，一般放在解答题里考察，选择题考的少。

（14）定积分的几何意义

(1) 当$f(x)\geq 0$时，定积分$\int_a^b f(x)dx$表示由连续曲线$y=f(x)$,直线$x=a,x=b(a<b)$

和x轴所围成的曲边梯形$aABb$的面积S，即$S=\int_a^b f(x)dx$

(2)当$f(x)\leq 0$时，曲边梯形$aABb$的面积S如图2.即$S=-\int_a^b f(x)dx$



以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

1.设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续且$f(x)>0$则（）

$A.\int_a^b f(x)dx>0$　　$B.\int_a^b f(x)dx<0.$

$C.\int_a^b f(x)dx=0$　　$D.\int_a^b f(x)dx$的符号无法确定

【答案解析】A

若在区间$[a,b]$上$f(x)>0$，则定积分$\int_a^b f(x)dx$的值是由曲线$y=f(x)$，直线

$x=a,x=b,y=0$所围成图形的面积，所以$\int_a^b f(x)dx>0$

第十五个考点相对来说在选择题里面是高频考点，一般考察求多元函数偏导数。

（15）多元函数偏导数

定义：设D为xOy平面上的一个区域，如果对于D上的每一点P（x,y），变量z依照某一规律f有唯一确定的数值与之对应，则称z为x,y的函数，记作$z=f(x,y)$，类似的可以定义三元函数，记作$u=f(x,y,z)$二元及二元以上的函数统称多元函数.

偏导数的求法：

求二元函数$z=f(x,y)$对x和y的偏导数，并不需要新的方法，当求$f(x,y)$对x的偏导数时，只要将二元函数中的y看成是常数，而对x求导数就行了.

同理，求$f(x,y)$对y的偏导数时，只要将二元函数中的x看成是常数，而对y求导数就行了.如果要求$f(x,y)$在点（x_0,y_0）处的偏导数，只需在偏导函数中将$x=x_0$，$y=y_0$带入即可。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设二元函数$z=e^{x^2+y}$,则下列各式中正确的是（）

$A.\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2}B.\frac{\partial z}{\partial y}=e^{y}C.\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x^2+y}D.\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2+y}$

【答案解析】D

$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2+y},\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2+y}$

2.设函数$z=3x^2y$,则$\frac{\partial z}{\partial y}=()$

$A.6yB.6xyC.3xD.3x^2$

【答案解析】D

$z=3x^2y\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2$

3.设二元函数$z=x^y$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=()$

$A.yx^{y-1}B.yx^{y+1}C.x^y\ln xD.x^y$

【答案解析】A

$z=x^y\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$

4.设二元函数$z=\sqrt{x^2+y^2}$,则 $(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2=()$

$A.1B.2C.x^2+y^2D.\frac{1}{x^2+y^2}$

【答案解析】A

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2=1$$

5.若二元函数$z=x^2y+3x+2y$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=$

$A.2xy+3+2yB.xy+3+2yC.2xy+3D.xy+3$

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+3\Rightarrow C$$

6.设函数$z=(x-y)^{10}$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=$

$A.(x-y)^{10}B.-(x-y)^{10}C.10(x-y)^9D.-10(x-y)^9$

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=10(x-y)^9\Rightarrow C$$

7.设函数$z=x^2e^y$,则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$

$A.0B.\frac{1}{2}C.1D.2$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^y\Rightarrow\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=2\Rightarrow D$$

第十六个考点相对来说在选择题里面是高频考点，一般考察求二阶偏导数。

（16）二阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}=f''_{yx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{yy}(x,y)$$

称$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$为$z=f(x,y)$的二阶混合偏导数.

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设二元函数$z=\cos(xy)$,则$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=()$

$A.y^2\sin(xy)B.y^2\cos(xy)C.-y^2\sin(xy)D.-y^2\cos(xy)$

【答案解析】D

$$z=\cos(xy)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\text{-}y\sin(xy)\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-y^2\cos(xy)$$

第十七个考点对于高数一相对来说在选择题里面是一般考点，有些年份会考察，有些年份不考察。

（17）向量代数与空间解析几何（只针对高数一考生）

一、平面的一般方程为$Ax+By+Cz+D=0$

其中A、B、C不全为零，x、y、z的系数就是该平面的一个法线向量n的坐标，

即$n=\{A,B,C\}$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.平面$x+2y-3z+4=0$的一个法向量为

$A.\{1,-3,4\} B.\{1,2,4\} C.\{1,2,-3\} D.\{2,-3,4\}$

【答案解析】

由法向量的定义可知

平面$x+2y-3z+4=0$的一个法向量为$\{1,2,-3\}$

$\Rightarrow C$

2.过点$\{1,0,0\},\{0,1,0\},\{0,0,1\}$的平面方程为

$A.x+y+z=1 B.2x+y+z=1$

$C.x+2y+z=1 D.x+y+2z=1$

可以把点坐标直接带入 ，符合的只有 A

二、简单的二次曲面

(1) 球面，方程对应为 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c^2)=R^2$

球心为 (a,b,c),半径为R的球面方程

(2) 椭球面，方程对应为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

中心在原点

(3) 圆柱面方程为$x^2+y^2=R^2$

(4) 椭圆柱面方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

(5) 双曲柱面方程对应为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

(6) 抛物柱面方程对应为$x^2-2py=0(p>0)$

(7) 旋转抛物面方程对应为$z=x^2+y^2$

(8) 圆锥面，方程对应为$x^2+y^2-z^2=0$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$表示顶点在原点，$O_z$为对称轴

【真题解析】

1.方程$x^2+y^2-2z=0$表示的二次曲面为

A.柱面B.球面C.旋转抛物面D.椭球面

【答案解析】

$x^2+y^2-2z=0\Rightarrow x^2+y^2=2z$

$\Rightarrow\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=z$

$\Rightarrow$方程$x^2+y^2-2z=0$表示的二次曲面为旋转抛物面

$\Rightarrow C$

2.设球面方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$,则该球的球心坐标和半径分别为

$A.(-1,2,-3);2$ $B.(-1,2,-3);4$

$C.(1,-2,3);2$ $D.(1,-2,3);4$

【答案解析】

根据球面方程的定义得到

该球的球心坐标为$(1,-2,3)$，该球的半径为$2(R^2=2^2=4)$

$\Rightarrow$ C

第十八个考点对于高数二相对来说在选择题里面是高频考点，一般考察基本概率初步。

（18）概率初步（只针对高数二考生）

事件的关系：

(1) 事件的包含与相等关系

设A,B为两个事件，如果事件A发生，必然导致事件B发生。则事件B包含事件A，或事件A包含于事件B,记作$A\subset B$，或$B\subset A$.如果事件A包含事件B，事件B又包含事件A，则称A,B事件相等$A=B$.

(2) 设A,B为两个事件，$A\cup B$（或$A+B$）表示事件A与B中至少有一个发生。$A\cap B$（或$A.B$或AB）表示事件A与B同时发生。

(3) 事件互不相容或对立关系

如果事件A与事件B在同一次实验中不能同时发生，即$AB=\varnothing$，

称事件A与B是互不相容的（或互斥的），

也称A与B互斥。设有事件A，事件A不发生为事件A的逆（或者A的对立事件）记作$\overline{A}$,

若$B=\overline{A}$,

则A,B具有对立关系。

概率的性质：

定义：设E为含有n个基本事件的古典型实验，A为由m个基本事件组成的随机事件，那么A的概率为$P(A)=\dfrac{m}{n}$,则称这样定义的概率为概率的古典型定义。

基本性质：

(1)$0\le P(A)\le 1$

(2) $P(\Omega)=1$

(3) 有限可加性：若A_1，$A_2....A_n$两两互斥，则$P(\sum\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$

(4) 加法定理：若A,B为任意两个随机事件，则$P（A+B）=P（A）+P（B）-P（AB）$

(5) $P（\overline{A}）=1-P(A)$

离散性随机变量的数学期望：

定义：设离散型随机变量ξ的概率分布为则称$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i p_i$,为$\xi$的数学期望或均值，记作$E（\xi）$

则称$\sum\limits_{i=1}^{n}[x_i-E（\xi）]^2 p_i$,则称此级数的和为$\xi$的方差，记作$D（\xi）$ 则称$\sqrt{D（\xi）}$为随机变量ξ的标准差.

ξ	x_1	x_2	...	x_n
$P(\xi=x_i)$	P_1	P_2	...	p_n

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.甲乙两人各自独立射击1次，甲射中目标的概率为0.8，乙射中目标的概率为0.9，则至少有一人射中目标的概率为（）

$A.0.98 B.0.9 C.0.8 D.0.72$

【答案解析】A

设A为甲射中，B为乙射中，$P(A)=0.8, P(B)=0.9$

至少有一人射中的概率$1-P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-(1-0.8)\times(1-0.9)=0.98$

2.设事件A，B相互独立，A, B发生的概率分别为0.6和0.9，则A，B都不发生的概率为（）

$A.0.54 B.0.04 C.0.1 D.0.4$

【答案解析】B

事件A, B相互独立，则$\overline{A}, \overline{B}$也相互独立，故$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A}).P(\overline{B})=(1-0.6)\times(1-0.9)$

$=0.04$

3.设事件A, B互不相容，$P(A)=0.3, P(B)=0.2$，则$P(A+B)=()$

$A.0.44 B.0.5 C.0.1 D.0.06$

【答案解析】B

4.设A, B为两个随机事件，且相互独立，$P(A)=0.6, P(B)=0.4$ 则$P(A-B)=$

$A.0.24 B.0.36 C.0.4 D.0.6$

【答案解析】

因为A, B为两个随机事件，且相互独立

$\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$

$=0.6-0.6\times0.4=0.36\Rightarrow B$

5.设离散型随机变量X的概率分布如下，则$a=$

X	-1	0	1	2
P	2a	a	3a	4a

【答案解析】

由概率分布性质得

$a+2a+3a+4a=10a=1\Rightarrow a=0.1\Rightarrow A$

第十九个考点对于高数一相对来说在选择题里面是一般考点，一般考察判断级数收敛发散性。

（19）无穷级数及常微分方程（只针对高数一考生）

无穷级数：

（一）定义：设有数列$\{u_n\}(n=1,2,\ldots)$,称表达式$u_1+u_2+\ldots u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为无穷级数，简称级数，而称$u_1$为首项，$u_n$为级数的一般项。

（二）收敛与发散

如果数列$\{S_n\}$有极限，即$\lim_{n\to\infty}S_n=S$,则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.极限值S称为级数的和，

或者说级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛收敛于S，记为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$.反之，若极限$\lim_{n\to\infty}S_n$不存在，则称级数发散。

（三）收敛级数的必要条件

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，由此可知：若$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$一定发散

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=0$，级数的收敛性不能判断，如级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛。

（四）绝对收敛与条件收敛

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$一定收敛，此时$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$称为绝对收敛

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，但级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，此时收敛为条件收敛

（五）判定方法

1.比较判别法

若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{v}_n$皆为正项级数，且$0\le u_n\le \mathrm{v}_n(n=1,2,\ldots n)$.则

(1) 若$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{v}_n$收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必收敛。

(2) 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散时,$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{v}_n$必发散。

2.比值判别法（达朗贝尔判别法）

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{为正项级数如果}\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\text{，则}\begin{cases}\rho<1\text{时收敛}\\\rho>1\text{时发散}\\\rho=1\text{时不定}\end{cases}$$

如果u_n常有因子n，用这种方法判别正项级数的收敛性比较方便

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.已知a为常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+a^2}$

$A.$发散$B.$条件收敛$C.$绝对收敛$D.$收敛性与a的取值有关

【答案解析】B

当$n\to\infty$时，$u_n=(-1)^n\frac{1}{n+a^2}\to 0.$

$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n+a^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+a^2}$,因为$\frac{1}{n+a^2}\le\frac{1}{n}$,而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n+a^2}\right|$发散

由莱布尼茨判别法可知，$u_n=\frac{1}{n+a^2}>u_{n+1}=\frac{1}{n+1+a^2}$,且$\lim_{n\to\infty}u_n=0$,则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$收敛

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+a^2}$条件收敛.

2.级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k}{n^2}$($k$为非零常数)

$A.$绝对收敛$B.$条件收敛$C.$发散$D.$收敛值与k的取值有关

【答案解析】A

当$n\to\infty$时，$u_n=(-1)^n\frac{k}{n^2}\to 0.$

$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{k}{n^2}\right|=|k|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,显然级数$|k|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛

即$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k}{n^2}$绝对收敛

第十九个考点对于高数一同学相对来说在选择题里面是一般考点，一般考察求收敛半径。

（20）收敛半径求法

收敛半径

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$收敛半径的求法

(1) 对于不缺项的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，设$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$,则收敛半径$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho},0<\rho<+\infty\\0,\rho=+\infty\\+\infty,\rho=0\end{cases}$

(2)对于缺项的幂级数.如$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$，令$u_n=a_nx^{2n},u_{n+1}=a_{n+1}x^{2(n+1)}$,

考察$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{2(n+1)}}{a_nx^{2n}}\right|=\rho x^2$

则当$\rho x^2<1$，级数收敛，可知收敛半径$R=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\rho}},0<\rho<+\infty\\+\infty,\ \rho=0\\0,\ \rho=+\infty\end{cases}$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$的收敛半径为（）

$A.0B.1C.2D+\infty$

【答案解析】

$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$

故幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$的收敛半径$R=\frac{1}{\rho}=1$

（二）填空题

本部分共计共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，下面我们一起梳理填空题的考试知识点和真题解析。填空题这个部分，需要填写题目的最终结果，这个过程中避免不了计算，10 个题目中，至少有 4-6 个题目是可以直接观察出结果的，比较浅显简单；另外 4-6 题需要大家做个运算过程计算出最终结果，大家在这个计算的过程中，要做到仔细、认真，切莫出现知识点掌握了，但是结果计算错误的尴尬。这个板块大家掌握了基础考点至少可以拿到 20-30 分。

第一个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察重要极限公式及其变形。

（1）两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

扩充一般形式

$$\lim_{\partial(x)\to 0}\frac{\sin(x)}{\partial(x)}=1$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{n}=e$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

也可扩充为一般形式

$$\lim_{\partial(x)\to\infty}\left[1+\frac{1}{\partial(x)}\right]^{\partial(x)}=e$$

$$\lim_{\partial(x)\to 0}\left[1+\partial(x)\right]^{\frac{1}{\partial(x)}}=e$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1. $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sin(x-2)} = $ ______

【答案解析】

重要极限（1）

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sin(x-2)} = \frac{1}{\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}} = 1$$

2. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}} = $ ____

【答案解析】

重要极限（2）

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}\cdot 2} = e^2$$

3. $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{\frac{x}{3}} = $ ____

【答案解析】

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{\frac{x}{3}} = \lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{-\frac{x}{2}\cdot(-\frac{2}{3})} = e^{-\frac{2}{3}}$$

4. 设 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{ax} = 3$，则 $a = $ ____

【答案解析】

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{ax} = \frac{1}{a}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} = \frac{2}{a} = 3$$

$$a = \frac{2}{3}$$

5. $\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}} = $ _____

【答案解析】

$$\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1-3x)^{-\frac{1}{3x}\cdot(-3)} = e^{-3}$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}=$ ______

【答案解析】

可以采用特殊极限一采用的原理等价无穷小代换

当$x\to 0$时，$x\sim\sin x\sim\tan x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$$

7. 当$x\to 0$时，$f(x)$与$3x$是等价无穷小，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$ ______

【答案解析】

因为当$x\to 0$时，$f(x)$与$3x$是等价无穷小

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{3x}=3$$

第二个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察求极限的方法。

（2）求极限方法

①直接带入法：分母不为零的可以通过极限的四则运算法则直接带入求解。

函数极限的四则运算定理：

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x).g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x).\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A.B$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$时，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{A}{B}$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

$1.\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4+x^2-2}{4x^2+5x-8}=$______

【答案解析】

这里由于分母不为零，所以直接把$x=1$代入

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^4+x^2-2}{4x^2+5x-8}=\frac{3+1-2}{4+5-8}=2$$

$2.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{2x^2+3}=$______

【答案解析】

这里由于分母不为零，所以直接把$x=0$代入

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{2x^2+3}=\frac{0-1}{0+3}=-\frac{1}{3}$$

第三个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察函数在某一点的连续性。

（3）函数连续性

①函数在某一点上的连续性

定义1：设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，

如果有自变量Δx（初值为x_0）趋近于0时，

相应的函数改变量Δy也趋近于0，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

则称函数$y=f(x)$在点x_0处连续.

定义2：设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，

如果当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限值存在，

且等于x_0处的函数值$f(x_0)$，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

则称函数$y=f(x)$在点x_0处连续.

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.若函数$f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\neq 0\\ 3, & x=0\end{cases}$在$x=0$处连续，则$a=$____

【答案解析】连续性定义：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$\lim\limits_{x\to 0}(2x+a)=f(0)$

$0+a=3$

$a=3$

2.设函数$f(x)=\begin{cases}e^{3x}-1, & x\geq 0\\ a, & x<0\end{cases}$在$x=0$处连续，则$a=$____

【答案解析】

连续性定义：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，由于是在$x=0$处连续

$\lim\limits_{x\to 0}(e^{3x}-1)=f(0)=a$

$1-1=0=a$

3.若函数$f(x)=\begin{cases}5x, & x<0\\ a, & x\geq 0\end{cases}$在$x=0$处连续，则$a=$____

【答案解析】

连续性定义：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，由于是在$x=0$处连续

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}5x=0$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}a=a$

$\Rightarrow a=0$

第四个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察求函数间断点。

（4）函数间断点

定义：如果函数$f(x)$在点x_0处不连续，则称点x_0为$f(x)$的一个间断点.

由函数在某点连续的定义可知，如果函数$f(x)$在点x_0处有下列三种情况之一，则点x_0是$f(x)$的一个间断点：

(1) 在点x_0处，$f(x)$没有定义。

(2) 在点x_0处，$f(x)$的极限不存在。

(3) 虽然点x_0处$f(x)$有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.函数$f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$的间断点为$x=$_____

【答案解析】

当$x-2=0$即$x=2$时，函数$f(x)$无定义。所以$x=2$是函数$f(x)$的间断点。

2.函数$f(x)=\dfrac{2}{x-1}$的间断点为$x=$_____

【答案解析】

当$x-1=0$,即$x=1$时，函数$f(x)$无定义，所以函数$f(x)$的间断点为$x=1$。

第五个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察函数定义公式及其变形。

（5）导数定义公式

设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，若自变量x在点x_0处的改变量为Δx（$x_0+\Delta x$仍在该领域内）.函数$y=f(x)$相应地有改变量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$存在

则此极限值为函数$y=f(x)$在点x_0处的导数.记作$y'\big|_{x=x_0}$，$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$或$f'(x_0)$.$f$

即$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.若函数$f(x)$满足$f'(1)=2$，则$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=$______

【答案解析】1

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1}.\frac{1}{x+1}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}.\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=2\text{x}\frac{1}{2}=1$$

第六个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察求函数在某点的切线。

（6）导数的几何意义

导数的几何意义：函数$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$就是曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处的切线斜率

曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处的切线方程为$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处的法线方程为$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.已知曲线$y=x^2+x-2$的切线l斜率为3，则l的方程为______

【答案解析】

曲线在某一点的切线斜率$k=y'=2x+1=3\Rightarrow x=1$

$y|_{x=1}=0$,即切线过点（1,0），所求切线为$y=3(x-1)$,即$3x-y-3=0$

2.曲线$y=\ln x$在点（1,0）处的切线方程为______

【答案解析】

切线斜率$k=y'|_{x=1}=\dfrac{1}{x}\Big|_{x=1}=1$即切线方程为$y-1=x\Rightarrow y=x-1$

第七个考点相对来说在填空题里面是必考点，一般考察基本初等函数公式和导数的四则运算法则。

（7）求导方法

①基本初等函数导数公式

$1.(c)'=0$

$2.(x^a)'=ax^{a-1}$

$3.(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,且a\neq 1)$

$4.(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$5.(a^x)'=a^x\ln a$

$6.(e^x)'=e^x$

$7.(\sin x)'=\cos x.(\cos x)'=-\sin x$

$8.(\tan x)'=\sec^2 x.(\cot x)'=-\csc^2 x$

$9.(\sec x)'=\sec x.\tan x/（\csc x）'=-\csc x.\cot x$

$10.(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1<x<1)$

$11.(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1<x<1)$

$12.(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$13.(arc\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

②导数的四则运算法则

$1.(u\pm v)'=u'\pm v'$

$2.(u.v)'=u'.v+u.v'$

$3.(cu)'=cu'(c为常数)$

$4.(\dfrac{u}{v})'=\dfrac{u'.v-u.v'}{v^2}(v\neq 0)$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设函数f（x）$=x-\frac{1}{x}$，则$f'(x)=$___

【答案解析】

$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$

2.设函数$y=2+\sin x$，则$y'=$____

【答案解析】

$y'=0+\cos x=\cos x$

3.设函数$y=x^2-e^x$，则$y'=$____

【答案解析】

$y'=2x-e^x$

4.设函数$y=x^3$，则$y'=$____

【答案解析】

$y'=3x^2$

5.设函数$y=\frac{x}{1+x}$，则$y'=$____

【答案解析】

$y'=\frac{1+x-x}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}$

6.设函数$f(x)=x-\arctan x$,则$f'(x)=$_____

【答案解析】利用求导四则运算法则

$f'(x)=(x-\arctan x)'=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}$

第八个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察隐函数求导方法

（8）隐函数求导

解析法表示函数通常有两种：

(1).$y=f(x)$ 来表示的，称之为显函数。如 $y=\sin wx$，$y=e^{x}\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)$

(2).x与y之间的函数关系是由一个方程 $F(x,y)=0$ 来确定这种称之为隐函数，

如 $2x+y^{3}-1=0$，$xy-e^{x}+e^{y}=0$

对于隐函数的求导通常做法：

可直接在方程 $F(x,y)=0$ 的两端同时对x求导，而把y视为中间变量，利用复合函数求导法即可。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^{y}=x+y$ 所确定的隐函数，则 $\frac{dy}{dx}=$ ___

【答案解析】

$e^{y}=x+y$，两边同时对 x 求导得到

$$e^{y}.y'=1+y' \Rightarrow \frac{dy}{dx}=y'=\frac{1}{e^{y}-1}$$

2.设 $y=y(x)$ 是由方程 $y=x-e^{y}$ 所确定的隐函数，则 $\frac{dy}{dx}=$ ___

【答案解析】

$y=x-e^{y}$，两边同时对 x 求导得

$$y'=1-e^{y}.y' \Rightarrow (1+e^{y})\,y'=1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+e^{y}}$$

第九个考点相对来说在填空题里面是一般考点，一般考察对数求导法

（9）对数求导法

一般解题思路为两边同时取对数，在对x求导，得出y'

【真题解析】

1.设$f(x)=x^{2x}$,则$f'(x)=$____

【答案解析】

先对原函数两边同时取对数，得到

$\ln y=2x\ln x$

再两边同时对x求导得到

$\frac{y'}{y}=2\ln x+2\Rightarrow y'=y(2\ln x+2)$

再把y替换回来最终得到

$y'=2x^{2x}(\ln x+1)$

第十个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察高阶求导

（10）高阶求导

如果函数$y=f(x)$的导数$y'=f'(x)$仍是x的可导函数，那么就称$f'(x)$的导数为$f(x)$的二阶导数，相应地$f'(x)$称为函数$y=f(x)$的一阶导数.二阶导数记为y''，$f''(x)$，$\frac{d^2y}{dx^2}$或$\frac{d^2f}{dx^2}$

$y''=(y')'$，$f''(x)=[f'(x)]'$或$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$

那么以此类推，f（x）得n-1阶导数的导数称为f（x）的n阶导数

记作$y^{(n)}$或$y^{(n)}(x)$ 或$\frac{d^ny}{dx^n}$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设函数$f(x)=\sin(1-x)$，则$f''(1)=$____

【答案解析】

$f'(x)=-\cos(1-x)\Rightarrow f''(x)=\sin(1-x)\Rightarrow f''(1)=0$

2.设函数$y=x^{\frac{3}{2}}+e^{-x}$,则$y''=$____

【答案解析】

$y=x^{\frac{3}{2}}+e^{-x}\Rightarrow y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-e^{-x}\Rightarrow y''=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}+e^{-x}$

第十一个考点相对来说在填空题里面是必考点，一般考察求函数微分

（11）微分

微分公式：

(1)d（c）= 0（c为常数）.(2）$d(x^a)=ax^{a-1}dx$

(3)$d(a^x)=a^x\ln adx(a>0,\text{且}a\neq1)$

(4)$d(e^x)=e^xdx$.(5)$d\log_a x=\dfrac{1}{x\ln a}dx(a>0,\text{且}a\neq1)$

(6)$d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx$.(7)$d(\sin x)=\cos xdx$

(8)$d(\cos x)=-\sin xdx$

函数的和、差、积、商微分运算公式

设$u=u(x),v=v(x)$可微分，则

$d(cu)=cdu$（c为常数）； $d(u\pm v)=du\pm dv$

$d(uv)=vdu+udv;d(\dfrac{u}{v})=\dfrac{vdu-udv}{v^2}(v\neq0)$

函数$y=f(x)$在$x=x_0$处的微分，常记作 $dy|_{x=x_0}$ 或$df(x)|_{x=x_0}$

$\dfrac{dy}{dx}=f^{'}(x)\Rightarrow dy=f^{'}(x)dx$

政治、英语、高等数学、医学综合、教育理论

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设函数$y=(x-3)^4$,则$dy=$____

【答案解析】

$y'=4(x-3)^3 \Rightarrow dy=4(x-3)^3dx$

2.设函数$y=x^2+e^x$,则$dy=$_____

【答案解析】

$y'=2x+e^x \Rightarrow dy=(2x+e^x)dx$

3.设函数$y=x+\sin x$,则$dy=$_____

【答案解析】

$y'=1+\cos x \Rightarrow dy=(1+\cos x)dx$

4.若$y=e^{2x}$,则$dy=$_____

【答案解析】

$y=e^{2x} \Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=2e^{2x} \Rightarrow dy=2e^{2x}dx$

5.设函数$y=\ln\sin x$,则$dy=$_____

【答案解析】

$y=\ln\sin x \Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sin x}.(\sin x)'=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

$\Rightarrow dy=\cot xdx$

第十二个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察求函数单调性和单调区间

（12）导数的应用

①函数单调性

设函数 $f(x)$在区间 (a,b)内可导 .

1.如果在区间 (a,b)内$f'(x)>0$,则函数 $f(x)$在区间 (a,b)内是递增的；

2.如果在区间 (a,b)内$f'(x)<0$,则函数 $f(x)$在区间 (a,b)内是递减的。

注： $f(x)$在个别点处 $f'(x)=0$不影响 $f(x)$的单调性 .

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.函数$f(x)=x+\frac{1}{x}$的单调增区间是 ______

【答案解析】

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2},令f'(x)>0\Rightarrow x<-1或x>1$$

函数$f(x)=x+\frac{1}{x}$的单调增区间是（-∞,-1)∪(1,+∞）

第十三个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察求曲线的水平和铅直渐近线

（13）曲线的水平渐近线与铅直渐近线

定义：

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$或$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$或$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，则

称直线$y=A$是曲线$y=f(x)$的水平渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，则

称直线$x=a$是曲线$y=f(x)$的铅直渐近线.

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.曲线$y=\dfrac{x+1}{2x+1}$的水平渐近线方程为 _____

【答案解析】

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2},\text{水平渐近线方程为}y=\frac{1}{2}$$

2.曲线$y=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$的铅直渐近线方程是 ____

【答案解析】

$$\lim_{x\to1}\frac{x+1}{(x-1)^2}=\infty\text{，则}x=1\text{是}y=\frac{x+1}{(x-1)^2}\text{的铅直渐近线}$$

3.曲线$y=\dfrac{x+1}{2x+1}$的铅直渐近线方程为 _____

【答案解析】

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{x+1}{2x+1}=\infty\text{，}x=-\frac{1}{2}\text{是曲线}y=\frac{x+1}{2x+1}\text{的铅直渐近线方程}$$

第十四个考点相对来说在填空题里面是必考点，一般考察求不定积分

（14）不定积分的性质及公式

区间上$f(x)$的原函数的全体，称为$f(x)$在I上的不定积分记为$\int f(x)\mathrm{d}x$.

如果$F(x)$为$f(x)$的一个原函数，则有$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，其中$C$为任意常数.

不定积分的性质及公式

(1)$\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x), d\int f(x)dx = f(x)dx$

(2)$\int dF(x) = F(x)+C, \int F'(x)dx = F(x)+C$

(3)$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$($k$为常数)

(4)$\int[f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(1)$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}+C(a\neq -1)$

(2)$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$

(3)$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C(a>0, a\neq 1)$

(4)$\int e^x dx = e^x + C$

(5)$\int \sin x dx = -\cos x + C$

(6)$\int \cos x dx = \sin x + C$

(7)$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

(8)$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

(9)$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$

(10)$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + C$

(11)$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

(12)$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

政治、英语、高等数学、医学综合、教育理论

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.$\int \frac{1}{2x}dx =$ ____

【答案解析】

$$\int \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

2.$\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2})dx =$ _____

【答案解析】

$$\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2})dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx = \ln|x| + \arctan x + C$$

3.若$f(x)dx = \cos(\ln x) + C$,则$f(x) =$ _____

【答案解析】

$$f(x) = [\cos(\ln x) + C]' = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)$$

4.$\int (2x+3)dx =$ _____

【答案解析】

$$\int (2x+3)dx = \int 2xdx + \int 3dx = x^2 + 3x + C$$

5.$\int \frac{1}{x^2}dx =$ ____

【答案解析】考察不定积分的基本公式

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

6.$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$ _____

【答案解析】考察不定积分的基本公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$$

第十五个考点相对来说在填空题里面考察较少，一般都放在解答题

（15）求不定积分的常用方法

一、换元积分法（凑微 分法）

设$f(\mathrm{u})$有原函数$F(\mathrm{u})$，且$\mathrm{u}=v(x)$,则$F[v(x)]$是$f[v(x)]v'(x)$的原函数，即有：

$$\int f[v(x)]v'(x)dx=F[v(x)]+C$$

二、分部积分法

设u、v都是x的可微函数，则有

$$\int udv=uv-\int vdu$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.$\int\frac{dx}{3-x}=$______

【答案解析】

$$\int\frac{dx}{3-x}=-\int\frac{1}{x-3}d(x-3)=-\ln|3-x|+C(C为任意常数)$$

第十六个考点相对来说在填空题里面是必考点，一般考察求定积分

（16）定积分

$\int_a^b f(x)dx$称$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

其中$f(x)$称为被积函数，$f(x)dx$称为被积表达式，x称为积分变量,$[a,b]$称为积分区间，a称为积分下限，b称为积分上限.

注意：

⑴ 定积分若存在，它只是一个确定的常数，它只与被积函数$f(x)$及积分区间$[a,b]$有关，而与积分变量的符号无关，即应有$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

(2) 定积分$\int_a^b f(x)dx$中，上下限的大小没有限制，但若颠倒积分上下限，必须改变定积分的符号，即$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.特别地有$\int_a^a f(x)dx = 0$

1.常数可以提到积分号之外，即若k为常数，则有$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

2.两函数代数和的定积分等于它们的定积分的代数和即有

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

可以推广到有限个函数的代数和的情况.

3.定积分的可加性：如果积分区间$[a,b]$被点c分成两个小区间$[a,c]$与$[c,b]$，则有$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4.如果在区间$[a,b]$上，总有$f(x) \le g(x)$,则有$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

牛顿—莱布尼茨公式

如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上任意一个原函数则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx=$___

【答案解析】

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=0+2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$$

$$=2\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=2$$

2.$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 3xdx=$____

【答案解析】

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 3xdx=\frac{1}{3}\sin 3x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{3}$$

3.$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=$____

【答案解析】

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_{1}^{+\infty}=1$$

4.$\int_{-1}^{1}(x^5+x^2)dx=$_____

【答案解析】

$$\int_{-1}^{1}(x^5+x^2)dx=(\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

5.$\int_{0}^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=$_____

【答案解析】考察凑微法

$$\int_{0}^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=2\int_{0}^{\pi}\sin\frac{x}{2}d(\frac{x}{2})=-2\cos\frac{x}{2}\Big|_{0}^{\pi}=2$$

6.$\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx =$ ______

【答案解析】考察凑微法

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = -\int_{0}^{+\infty} e^{-x}d(-x) = -e^{-x}\Big|_{0}^{+\infty} = 1$$

7.$\int_{-1}^{1} x\tan^{2} xdx =$ ______

【答案解析】

被积函数$x\tan^{2} x$在对称区间$[-1,1]$上是奇函数

所以得到$\int_{-1}^{1} x\tan^{2} xdx = 0$

8.$\int_{-1}^{1}(x\cos^{2} x + 2)dx =$ ______

【答案解析】

$$\int_{-1}^{1} x\cos^{2} xdx + \int_{-1}^{1} 2dx$$

由于被积函数$x\cos^{2} x$是在对称区间$[-1,1]$奇函数，所以为$\int_{-1}^{1} x\cos^{2} xdx = 0$

原式$= 0 + 2x\Big|_{-1}^{1} = 2 + 2 = 4$

第十七个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察求多元函数偏导数

（17）多元函数偏导数

定义：设D为xOy平面上的一个区域，如果对于D上的每一点P（x,y），变量z依照某一规律f有唯一确定的数值与之对应，则称z为x,y的函数，记作$z=f(x,y)$，类似的可以定义三元函数，记作$u=f(x,y,z)$二元及二元以上的函数统称多元函数.

偏导数的求法：

求二元函数$z=f(x,y)$对x和y的偏导数，并不需要新的方法，当求$f(x,y)$对x的偏导数时，只要将二元函数中的y看成是常数，而对x求导数就行了.

同理，求$f(x,y)$对y的偏导数时，只要将二元函数中的x看成是常数，而对y求导数就行了.如果要求$f(x,y)$在点（x_0,y_0）处的偏导数，只需在偏导函数中将$x=x_0$，$y=y_0$带入即可。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设函数$y=\sin(x+2y)$,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$____

【答案解析】

$y=\sin(x+2y)\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos(x+2y)$

2.设二元函数$z=e^{\frac{y}{x}}$,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=$_____

【答案解析】

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=(-\dfrac{y}{x^2})\ e^{\frac{y}{x}},\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=-\mathrm{e}$

第十八个考点相对来说在填空题里面是高频考点，一般考察求二阶偏导数

（18）二阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{xx}(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=f''_{xy}(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}=f''_{yx}(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{yy}(x,y)$$

称$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$为$z=f(x,y)$的二阶混合偏导数.

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设二元函数$z=x^3y^2$,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____

【答案解析】

$$z=x^3y^2\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y$$

2.设二元函数$z=x^2y^2$,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^2\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xy$$

3.设函数$z=\dfrac{e^y}{x}$,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_____

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{e^y}{x^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{e^y}{x^2}$$

4.函数$z=x\arcsin y$,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$_____

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\arcsin y\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

第十九个考点相对来说在填空题里面是必考点，一般考察求函数的全微分

（19）全微分

全微分$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$

一元函数$y=f(x)$在点x处可导与可微是等价的。二元函数$z=f(x，y)$可微与偏导数存在的关系是：函数$z=f(x，y)$在点$(x，y)$处可微的必要条件是偏导数$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$存在。可微的充分条件是$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$存在且连续。类似地，若三元函数$u=f(x,y,z)$可微，

则$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设函数$z=3x+y^2$,则$dz=$______

【答案解析】

$\frac{\partial z}{\partial x}=3,\frac{\partial z}{\partial y}=2y,dz=3dx+2ydy$

2.设二元函数$z=x^4\sin y$,则$dz\Big|_{(1,\frac{\pi}{4})}=$______

【答案解析】

$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^3\sin y,\frac{\partial z}{\partial y}=x^4\cos y,dz=3x^3\sin ydx+x^4\cos ydy$

$dz\Big|_{(1,\frac{\pi}{4})}=2\sqrt{2}dx+\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.设二元函数$z=x^2+2xy$,则$dz=$______

【答案解析】

$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2y,\frac{\partial z}{\partial y}=2x\Rightarrow dz=(2x+2y)dx+2xdy$

4.设二元函数$z=x^2+y^3$,则$dz\big|_{(1,1)}=$ _____

【答案解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2,dz=2xdx+3y^2dy\Rightarrow dz\big|_{(1,1)}=2dx+3dy$

5.设函数$z=\sin x.\ln y$,则$dz=$ _______

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln y.\cos x;\frac{\partial z}{\partial y}=\sin x.\frac{1}{y}$$

$$dz=\cos x\ln ydx+\frac{\sin x}{y}dy$$

第二十个考点对于高数二学员来说在填空题里面是高频考点，一般考察基本事件的概率

（20）概率初步（只针对高数二考生）

事件的关系：

⑴ 事件的包含与相等关系

设A,B为两个事件，如果事件A发生，必然导致事件B发生。则事件B包含事件A，或事件A包含于事件B,记作$A\subset B$，或$B\subset A$.如果事件A包含事件B，事件B又包含事件A，则称A,B事件相等$A=B$.

⑵ 设A,B为两个事件，$A\cup B$（或$A+B$）表示事件A与B中至少有一个发生。

$A\cap B$（或$A.B$或AB）表示事件A与B同时发生。

⑶ 事件互不相容或对立关系

如果事件A与事件B在同一次实验中不能同时发生，即$AB=\varnothing$，

称事件A与B是互不相容的（或互斥的），

也称A与B互斥。设有事件A，事件A不发生为事件A的逆（或者A的对立事件）记作$\overline{A}$，若$B=\overline{A}$，则A,B具有对立关系。

概率的性质：

定义：设E为含有n个基本事件的古典型实验，A为由m个基本事件组成的随机事件，

那么A的概率为$P(A)=\dfrac{m}{n}$,则称这样定义的概率为概率的古典型定义。

基本性质：

⑴$0\le P(A)\le 1$⑵ $P(\Omega)=1$

⑶ 有限可加性：若A_1，$A_2....A_n$两两互斥，则$P(\sum\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$

⑷ 加法定理：若A,B为任意两个随机事件，则$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

⑸ $P(\overline{A})=1-P(A)$

离散性随机变量的数学期望：

定义：设离散型随机变量ξ的概率分布为则称$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$,为ξ的数学期望或均值，记作E（ξ）

则称$\sum_{i=1}^{n}[x_i - E(\xi)]^2 p_i$,则称此级数的和为$\xi$的方差，记作$D$（$\xi$）

则称$\sqrt{D(\xi)}$为随机变量ξ的标准差.

ξ	x_1	x_2	...	x_n
$P(\xi = x_i)$	P_1	P_2	...	p_n

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设事件A发生的概率为0.7，则A的对立事件$\overline{A}$发生的概率为____

【答案解析】

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3$

第二十一个考点对于高数一学员来说在填空题里面是高频考点，一般考察求收敛半径

（21）收敛半径

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛半径的求法

(1) 对于不缺项的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则收敛半径$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, 0 < \rho < +\infty \\ 0, \rho = +\infty \\ +\infty, \rho = 0 \end{cases}$

(2)对于缺项的幂级数.如$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$，令$u_n = a_n x^{2n}, u_{n+1} = a_{n+1} x^{2(n+1)}$，

考察$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{2(n+1)}}{a_n x^{2n}}\right| = \rho x^2$

则当$\rho x^2 < 1$，级数收敛，可知收敛半径$R = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\rho}}, 0 < \rho < +\infty \\ +\infty，\rho = 0 \\ 0，\rho = +\infty \end{cases}$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮助你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$的收敛半径______

【答案解析】

$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}$，故幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$的收敛半径$R=\frac{1}{\rho}=3$

2.级数$\sum_{n=1}^{\infty}x^n$的收敛半径$R=$_____

【答案解析】

$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$,收敛半径$R=1$

3.幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$的收敛半径 ______

【答案解析】

$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n$,假设$a_n=n$，则有$\rho=\lim_{x\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})=1$

得到收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=1$

第二十二个考点对于高数一学员来说在填空题里面是高频考点，一般考察求微分方程通解

（22）微分方程（只针对高数一同学）

一阶微分方程解法：

⑴ 可分离变量的解法

⑵ 一阶线性微分方程

$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$的解法，可用公式法求解$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.微分方程$y'=3x^2$的通解$y=$______

【答案解析】

$y'=3x^2\Rightarrow dy=3x^2dx$,两边同时积分得$y=x^3+C$

2.微分方程$y'=2x$的通解$y=$______

【答案解析】

$y'=2x\Rightarrow dy=2xdx$,两边同时积分得$y=x^2+C$

3.微分方程$y'-2xy=0$的通解$y=$______

【答案解析】

$y'-2xy=0$，即$\frac{dy}{y}=2xdx$,两边同时积分得 $\ln y=x^2+C_1, y=Ce^{x^2}$

（三）解答题

解答题共 8 小题，每小题 8-10 分，共 70 分。下面我们一起梳理解答题的考试知识点和真题解析。这个版块对于很多同学来说是头痛的地方，大部分学生都想放弃这块。但是大家总结历年真题考试内容可以发现，这一块的内容考的比较固定（比如洛必达求导、求不定积分、定积分性质等），很多知识点都是必考的，而且解题的思路也是一样的，所以大家只要用心，这部分 8 个题目还是可以很轻松攻克 5-6 个的，拿到 50-60 分。

第一个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察求解或者证明函数在某一点上的连续性。

（1）函数连续性

①函数在某一点上的连续性

定义1：设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，

如果有自变量Δx（初值为x_0）趋近于0时，

相应的函数改变量Δy也趋近于0，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

则称函数$y=f(x)$在点x_0处连续.

定义2：设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，

如果当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限值存在，

且等于x_0处的函数值$f(x_0)$，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

则称函数$y=f(x)$在点x_0处连续.

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设函数f（x）$=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}，& x\neq 0\\ a，& x=0\end{cases}$在$x=0$处连续，求a.

【答案解析】

连续性定义：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=f(0)=a$

$a=1$

2.设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sin x}{x}, x<0\\ 3x+a, x\geq 0\end{cases}$在$x=0$处连续，求$a$.

【答案解析】

$\lim\limits_{x\to 0^+}(3x+a)=a$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3\sin x}{x}=3$

要使函数$f(x)$在$x=0$处连续，必须满足

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$

$\Rightarrow a=3$

第二个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察复合函数求导。

（2）复合函数求导

如果函数$u=\alpha$（x）在点x处可导，函数$y=f$（u）在对应点u处也可导，

则复合函数$y=f[\alpha$（x）]在点x处可导，且有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$y'_x=y'_u.u'_x$$

$$\{f[\alpha(x)]\}'=f'(u)\,u'(x)$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设函数$y=xe^{2x}$,求y'

【答案解析】

$y'=x'e^{2x}+x\,(e^{2x})'$

$y'=(1+2x)e^{2x}$

2.设函数$y=\cos(x^2+1)$,求y'

【答案解析】

$y'=-\sin(x^2+1).(x^2+1)'=-2x\sin(x^2+1)$

3.设函数$y=e^{\sin x}$,求y'

【答案解析】

$y=e^{\sin x}$

$y'=e^{\sin x}.(\sin x)'=\cos x.e^{\sin x}$

4.设函数$y=\sin(2x-1)$，求y'.

【答案解析】

$y=\sin(2x-1)$

$\Rightarrow y'=\cos(2x-1).(2x-1)'=2\cos(2x-1)$

第三个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察隐函数求导。

（3）隐函数求导

一般的，如果参数方程$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$（t为参数）确定了y为x的函数，在计算此类由参数方程所确定的导数时，不需要先消去参数t后再进行求导.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}=\frac{u'(t)}{v'(t)}=\frac{y'_t}{x'_t}$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设$\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = 1+t^3 \end{cases}$，求$\frac{dy}{dx}$.

【答案解析】

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t$$

2.设$\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$，求$\frac{dy}{dx}$.

【答案解析】

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2\sin 2t}{2\cos t}=-2\sin t$$

第四个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察隐函数求导。

（4）隐函数求导

解析法表示函数通常有两种：

⑴.$y=f(x)$ 来表示的，称之为显函数。如 $y=\sin wx$，$y=e^{x}\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})$

⑵.x与y之间的函数关系是由一个方程 $F(x,y)=0$ 来确定这种称之为隐函数，

如 $2x+y^{3}-1=0$，$xy-e^{x}+e^{y}=0$

对于隐函数的求导通常做法：

可直接在方程 $F(x,y)=0$ 的两端同时对x求导，而把y视为中间变量，利用复合函数求导法即可。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^{y}+xy=1$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

【答案解析】

$e^{y}+xy=1$，两边同时对 x 求导得

$$e^{y}.\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{e^{y}+x}$$

第五个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察函数的高阶求导。

（5）高阶求导

如果函数$y=f(x)$的导数$y'=f'(x)$仍是x的可导函数，那么就称$f'(x)$的导数为$f(x)$的二阶导数，相应地$f'(x)$称为函数$y=f(x)$的一阶导数.二阶导数记为y''，$f''(x)$，$\frac{d^2y}{dx^2}$或$\frac{d^2f}{dx^2}$

$y''=(y')'$，$f''(x)=[f'(x)]'$或$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$

那么以此类推，$f(x)$得$n-1$阶导数的导数称为$f(x)$的n阶导数

记作$y^{(n)}$或$y^{(n)}(x)$或$\frac{d^ny}{dx^n}$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设函数$f(x)=\cos(2x+1)$，求$f'''(0)$.

【答案解析】

$f'(x)=-2\sin(2x+1)\Rightarrow f''(x)=-4\cos(2x+1)\Rightarrow f'''(x)=8\sin(2x+1)$

$f'''(0)=8\sin 1$

2.设函数$f(x)=2x+\ln(3x+2)$,求$f''(0)$

【答案解析】

$f'(x)=2+\frac{1}{3x+2}.(3x+2)'=2+\frac{3}{3x+2}$

$f''(x)=\frac{-9}{(3x+2)^2}$

$\Rightarrow f''(0)=-\frac{9}{4}$

3.设函数$y=x\ln x$,求y''

【答案解析】

$y'=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1$

$y''=\frac{1}{x}$

第六个考点相对来说在解答题里面是必考点，一般考察洛必达法则求导。

（6）洛必达法则

如果当$x \to a$(或$x \to \infty$)时，函数$f(x)$与$F(x)$都趋于零或都趋于无穷大，则称$\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f(x)}{F(x)}$，

为未定型极限，并分别简记为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”.洛必达法则是求未定型极限的一种有效方法。

其它类型未定式:$0.\infty$；$\infty - \infty$也可以变形为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”来求解

方法：

(1）先判定是否符合“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型

(2）分别对分子分母同时求导，如果求导完发现还是属于“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型

那么再对分子分母同时求导。

(3）当出现分母不为零时，就可以直接代入求解。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$

【答案解析】

“$\dfrac{0}{0}$”型,原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - \cos x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + \sin x}{2} = \dfrac{1}{2}$

2.求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

【答案解析】

“$\dfrac{0}{0}$”型,原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + x\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x + \cos x - x\sin x}{\cos x} = 2$

3.求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{\sin x}$

【答案解析】

“$\dfrac{0}{0}$”型,原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^x}{\cos x}=-1$

4.计算$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

【答案解析】

“$\dfrac{0}{0}$”型,原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{1}=3$

5.计算$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$

【答案解析】

“$\dfrac{0}{0}$”型,原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(x-1)}{2x}=\dfrac{1}{2}$

6.计算$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{\ln x}$

【答案解析】

“$\dfrac{0}{0}$”型,原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x}{\frac{1}{x}}=e$

7.求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-2x^2-1}{\sin(x^2-1)}$

【答案解析】

“$\dfrac{0}{0}$”型,原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9x^2-4x}{2x\cos(x^2-1)}=\dfrac{5}{2}$

第七个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察求函数的极值。

（7）函数的极值

设$f(x)$在x_0的某领域内有定义.

(1) 如果$x \neq x_0$时，恒有$f(x) < f(x_0)$则称x_0为极大值点，$f(x_0)$为极大值

(2) 如果$x \neq x_0$时，恒有$f(x) > f(x_0)$则称x_0为极小值点，$f(x_0)$为极小值

极值存在的必要条件：

设函数$f(x)$在x_0可导，且在点x_0处取得极值，则必有

$f'(x_0)=0$，称满足$f'(x_0)=0$的点为函数$f(x)$的驻点，

由此可知，可导函数的极值点必为驻点。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.求函数$f(x)=x^3-3x$的极大值.

【答案解析】

$f'(x)=3x^2-3$, 令$f'(x)=0$，得驻点$x_1=-1, x_2=1$

又$f''(x)=6x, f''(-1)=-6<0, f''(1)=6>0$

所以$x_1=-1$为极大值点，$f(-1)=2$

2.求函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+5$的极值。

【答案解析】

$f'(x)=x^2-x$, 令$f'(x)=0$得到$x=1$或$x=0$

$f''(x)=2x-1$

$f''(1)=1>0 \Rightarrow$ 为极小值点$f(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+5=\frac{29}{6}$

$f''(0)=-1<0 \Rightarrow$ 为极大值点$f(0)=5$

3.设函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx$在$x=2$处取得极值，点（$1,-1$）为曲线$y=f(x)$的拐点，

求$a,b,c.$

【答案解析】

$f^{'}(x)=3ax^2+2bx+c;f^{''}(x)=6ax+2b$（1）

因为$x=2$处取得极值，$f^{'}(2)=12a+4b+c=0$

又点（$1,-1$）为拐点

$f^{''}(1)=6a+2b=0$（2）

点（$1,-1$）也在函数上代入得

$f(1)=a+b+c=-1(3)$

联立（1）（2）（3）解得

$a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2},c=0$

第八个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察曲线的凹凸性及拐点。

（8）曲线的凹凸性及拐点

曲线凹凸性的判别法：
设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在（a,b）内具有一阶和二阶导数，那么
(1) 若在（a,b）内，$f''(x)>0$,则f则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的
(2) 若在（a,b）内，$f''(x)<0$,则f则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的
曲线的拐点：
在连续的曲线上的凹弧与凸弧之间的分界点称为曲线的拐点。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.已知函数$f(x)=x^4-4x+1$
(1)求$f(x)$的单调区间及极值
(2) 求曲线$y=f(x)$的凹凸区间.

【答案解析】

$f'(x)=4x^3-4, f''(x)=12x^2$,令$f'(x)=0$，$x=1, f''(x)=0, x=0$

列表如下：

x	($-\infty$,0)	0	(0,1)	1	(1,$+\infty$)
y'	−	−4	−	0	+
y''	+	0	+	12	+

由表可知曲线$f(x)$的单调减区间为（$-\infty$,1），单调增区间为（1,$+\infty$）
凹区间为（$-\infty,+\infty$），极小值为$f(1)=1-4+1=-2$

2.已知函数$f(x)=\ln x-x$
(1)求$f(x)$的单调区间和极值
(2) 判断曲线$y=f(x)$的凹凸性.

【答案解析】

$f(x)$的定义域为（0,$+\infty$），$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$,令$f'(x)=0$,的驻点$x=1$

当$0<x<1, f'(x)>0$;当$x>1$时，$f'(x)<0$

$f(x)$的单调增区间时（0,1），单调减区间时（1,$+\infty$)

$f(x)$在$x=1$处取得极大值$f(1)=-1$

因为$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$，所以曲线是凸的.

第九个考点相对来说在解答题里面是必考点，一般考察求不定积分。

（9）求不定积分的常用方法

一、换元积分法（凑微分法）

设$f(\mathrm{u})$有原函数$F(\mathrm{u})$，且$\mathrm{u}=v(x)$,则$F[v(x)]$是$f[v(x)]v'(x)$的原函数，即有：

$$\int f[v(x)]v'(x)dx = F[v(x)]+C$$

二、分部积分法

设u、v都是x的可微函数，则有

$$\int udv = uv - \int vdu$$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.计算$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$

【答案解析】

设$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2, dx=2tdt$

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{e^{-t}}{t}.2tdt = 2\int e^{-t}dt = -2e^{-t}+C = -2e^{-\sqrt{x}}+C$$

2.计算$\int x\cos x^2 dx.$

【答案解析】

$$\int x\cos x^2 dx = \frac{1}{2}\int \cos x^2 dx^2 = \frac{1}{2}\sin x^2 + C$$

3.计算$\int x\cos xdx$

【答案解析】分部积分法：

$$\int x\cos xdx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$$

4.计算$\int x\arctan xdx$

【答案解析】分部积分法：

$$\int x\arctan xdx=\int \arctan xd(\frac{x^2}{2})=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}d(\arctan x)$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

5.计算$\int(x^{\frac{1}{3}}+e^x)dx$

【答案解析】不定积分基本公式

$$\int x^{\frac{1}{3}}dx+\int e^xdx=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}x^{1+\frac{1}{3}}+e^x+C=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+e^x+C$$

6.求$\int\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$

【答案解析】换元法

令$x=\sin t,-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$,得到$dx=\cos tdt$

原式$=\int\frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}}.\cos tdt=\int\frac{1}{\cos^2 t}dt=\tan t+C$

又$t=\arcsin x$

$\Rightarrow \tan t+C=\tan(\arcsin x)+C$

第十个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察求定积分。

（10）定积分

$\int_a^b f(x)dx$称$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

其中$f(x)$称为被积函数，$f(x)dx$称为被积表达式，x称为积分变量,$[a,b]$称为积分区间，a称为积分下限，b称为积分上限.

注意：

⑴ 定积分若存在，它只是一个确定的常数，它只与被积函数$f(x)$及积分区间$[a,b]$有关，而与积分变量的符号无关，即应有$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$.

(2) 定积分$\int_a^b f(x)dx$中，上下限的大小没有限制，但若颠倒积分上下限，必须改变定积分的符号，即$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.特别地有$\int_a^a f(x)dx=0$

1.常数可以提到积分号之外，即若k为常数，则有$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

2.两函数代数和的定积分等于它们的定积分的代数和即有

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

可以推广到有限个函数的代数和的情况.

3.定积分的可加性：如果积分区间$[a,b]$被点c分成两个小区间$[a,c]$与$[c,b]$,

则有$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

4.如果在区间$[a,b]$上，总有$f(x)\le g(x)$,则有$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

牛顿 — 莱布尼茨公式

如果 $F(x)$是连续函数 $f(x)$在区间 $[a,b]$上任意一个原函数则有

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

政治、英语、高等数学、医学综合、教育理论

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.计算$\int_1^{\sqrt{e}} 2x\ln x dx$

【答案解析】

$$\int_1^{\sqrt{e}} 2x\ln x dx=\int_1^{\sqrt{e}}\ln x dx^2=x^2\ln x\Big|_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}x^2.\frac{1}{x}dx=\frac{e}{2}-\frac{x^2}{2}\Big|_1^{\sqrt{e}}=\frac{1}{2}$$

2.计算$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$

【答案解析】

$$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}dx+\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\ln x\Big|_1^e+\frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_1^e=\frac{3}{2}$$

3.计算$\int_0^4 f(x)dx$,其中$f(x)=\begin{cases}x,x<1,\\ \frac{1}{1+x},x\geq 1\end{cases}$

【答案解析】

$$原式=\int_0^1 xdx+\int_1^4\frac{1}{1+x}dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\ln(1+x)\Big|_1^4=\frac{1}{2}+\ln\frac{5}{2}$$

4.求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin 3tdt}{x^2}$.

【答案解析】

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin 3tdt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\int_0^x \sin 3td（3t）}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(1-\cos 3x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{2}(3x)^2}{x^2}=\frac{3}{2}$$

5.计算$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}dx.$

【答案解析】

$$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}dx=\int_e^{+\infty}\frac{1}{\ln^3 x}d（\ln x）=-\frac{1}{2(\ln x)^2}\Big|_e^{+\infty}=\frac{1}{2}$$

第十一个考点相对来说在解答题里面是必考点，一般考察定积分的几何意义。

（11）定积分的几何意义

⑴ 当$f(x)\geq 0$时，定积分$\int_a^b f(x)dx$表示由连续曲线$y=f(x)$,直线$x=a,x=b(a<b)$

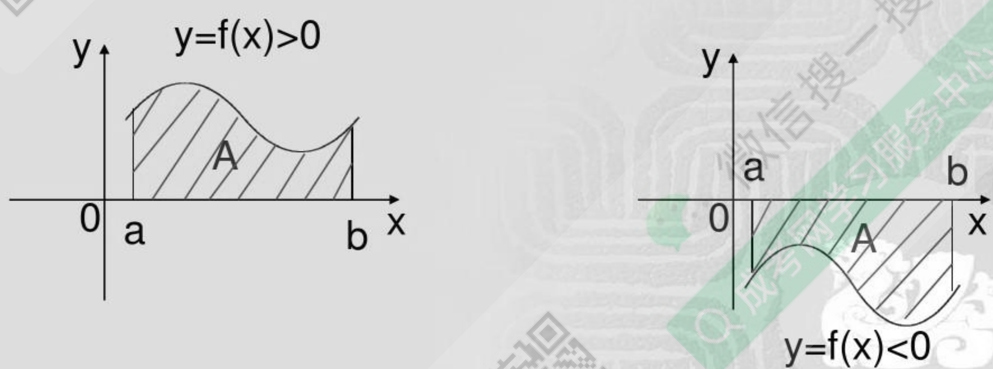
和x轴所围成的曲边梯形$aABb$的面积S，即$S=\int_a^b f(x)dx$

(2)当$f(x)\leq 0$时，曲边梯形$aABb$的面积S如图2.即$S=-\int_a^b f(x)dx$

如图:

$$1.\int_a^b f(x)dx=\begin{cases} A & f(x)\geq 0 \\ -A & f(x)<0 \end{cases}$$

A表示以y=f(X)为曲边的曲边梯形面积



以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.记曲线$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$与直线$y=2$所围成的平面图形为$D$，

(1) 求D的面积S.(2) 求D绕y轴旋转一周所得旋转体的体积V.

【答案解析】

(1) $S=2\int_0^{\sqrt{3}}\left[2-(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2})\right]dx=2\int_0^{\sqrt{3}}(-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2})dx=2\sqrt{3}$

(2)$V=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}f^2(y)dy=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2y-1)dy=\frac{3}{2}\pi$

2.求曲线$y=x^3$与直线$y=x$所围成的图形面积。

【答案解析】

由对称性可知

$S=2\int_0^1(x-x^3)dx=2(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4)\Big|_0^1=\frac{1}{2}$

3.设曲线$y=4-x^2(x\geq 0)$与x轴、y轴及直线$x=4$所围成的平面图形为D，

(1) 求D的面积S.

(2) 求x轴上方的阴影部分绕y轴旋转一周所得旋转体的体积V。

【答案解析】

(1) 面积$S=\int_0^2(4-x^2)dx-\int_2^4(4-x^2)dx=(4x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^2-(4x-\frac{x^3}{3})\Big|_2^4=16$

(2)体积$V=\pi\int_0^4x^2dy=\pi\int_0^4(4-y)dy=\pi(4y-\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^4=8\pi$

4.设D是由曲线$x=1-y^2$与x轴，y轴，在第一象限围成得有界区域，求：

(1) D的面积S

(2) D绕x轴旋转所得旋转体的体积V

【答案解析】

(1) $S=\int_0^1(1-y^2)dy=(y-\frac{1}{3}y^3)\Big|_0^1=\frac{2}{3}$

(2)$V=\int_0^1\pi y^2dx=\pi\int_0^1(1-x)dx=\frac{\pi}{2}$

第十二个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察求多元函数偏导数。

（12）多元函数偏导数

定义：设D为xOy平面上的一个区域，如果对于D上的每一点P（x, y），变量z依照某一规律f有唯一确定的数值与之对应，则称z为x, y的函数，记作$z = f(x, y)$，类似的可以定义三元函数，记作$u = f(x, y, z)$二元及二元以上的函数统称多元函数.

偏导数的求法：

求二元函数$z = f(x, y)$对x和y的偏导数，并不需要新的方法，当求$f(x, y)$对x的偏导数时，只要将二元函数中的y看成是常数，而对x求导数就行了.

同理，求$f(x, y)$对y的偏导数时，只要将二元函数中的x看成是常数，而对 y求导数就行了.如果要求 $f(x, y)$在点（x_0, y_0）处的偏导数，只需在偏导函数中将$x = x_0$，$y = y_0$带入即可。

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设函数$y = x^2 \sin y + ye^x$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y + ye^x$$

2.函数$z = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$，求$x^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2 \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2}$$

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = -1 + 1 = 0$$

第十三个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般考察求二阶偏导数。

（13）二阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{xx}(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=f''_{xy}(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}=f''_{yx}(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{yy}(x,y)$$

称$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$为$z=f(x,y)$的二阶混合偏导数.

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设二元函数$z=x^2y^2+x-y+1$,求$\frac{\partial z}{\partial y}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2y-1,\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^2+1,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xy$$

2.设函数$z=x^3y+xy^3$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y+y^3\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y+y^3\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3x^2+3y^2$$

第十四个考点相对来说在解答题里面是高频考点，一般结合二阶偏导数求二元函数极值。

（14）二元函数极值

解题思路：设函数$z = f(x, y)$在点（x_0, y_0)的某邻域内连续，有一阶和二阶连续偏导数，且

$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$又设$f''_{xx}(x_0, y_0) = A, f''_{xy}(x_0, y_0) = B, f''_{yy}(x_0, y_0) = C$

则（1）当$B^2 - AC < 0$时，函数$f(x, y)$在点（x_0, y_0)处取得极值，且当$A < 0$时时有极大值，当$A > 0$时有极小值.

（2）$B^2 - AC > 0$时，函数$f(x, y)$在点（x_0, y_0)处无极值.

（3）$B^2 - AC = 0$时，函数$f(x, y)$在点（x_0, y_0)处极值不能确定.

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设函数$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 3$,求$f(x, y)$的极值点与极值.

【答案解析】

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x$$

$$令\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow 驻点（0,0）$$

$f(x)$的2阶偏导数为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \Rightarrow A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = 2, B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} = 1, C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} = 2$$

因为$A > 0$，且$AC - B^2 > 0$所以（0,0）为$f(x, y)$的极小值点，极小值$f(0,0) = 3$

2.设二元函数$z=x^2+xy+y^2+x-y-5$,求z的极值.

【答案解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y+1,\frac{\partial z}{\partial y}=2y+x+1$$

令$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow$驻点（-1,1）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\Rightarrow A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=2,B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1,C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=2$$

因为$A>0$，且$B^2-AC<0$所以（-1,1）为$f(x,y)$的极小值点，极小值$f(-1,1)=6$

3.求二元函数$f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}-xy+y^2+3x$的极值.

【答案解析】

$f_x^{'}=x-y+3,f_y^{'}=-x+2y$

$$\begin{cases}x-y+3=0\\ -x+2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-6\\ y=-3\end{cases}$$

$f_{xx}^{''}(x,y)=1,f_{xy}^{''}(x,y)=-1,f_{yy}^{''}(x,y)=2$

$A=f_{xx}^{''}(-6,-3)=1,B=f_{xy}^{''}(-6,-3)=-1,C=f_{yy}^{''}(-6,-3)=2$

$B^2-AC=-1<0,A>0$

所以（-6,-3）为$f(x,y)$的极小值点，极小值$f(-6,-3)=-9$

第十五个考点对于高数二同学来说在解答题里面是必考点，一般考察随机变量 X 的概率、数学期望及方差。

（15）概率初步（只针对高数二考生）

事件的关系：

(1) 事件的包含与相等关系

设A,B为两个事件，如果事件A发生，必然导致事件B发生。则事件B包含事件A，或事件A包含于事件B,记作$A\subset B$，或$B\subset A$.如果事件A包含事件B，事件B又包含事件A，则称A,B事件相等$A=B$.

(2) 设A,B为两个事件，$A\cup B$（或$A+B$）表示事件A与B中至少有一个发生。

$A\cap B$（或$A.B$或AB）表示事件A与B同时发生。

(3) 事件互不相容或对立关系

如果事件A与事件B在同一次实验中不能同时发生，即$AB=\varnothing$，

称事件A与B是互不相容的（或互斥的），

也称A与B互斥。设有事件A，事件A不发生为事件A的逆（或者A的对立事件）记作$\overline{A}$，若$B=\overline{A}$，则A,B具有对立关系。

概率的性质：

定义：设E为含有n个基本事件的古典型实验，A为由m个基本事件组成的随机事件，

那么A的概率为$P(A)=\dfrac{m}{n}$,则称这样定义的概率为概率的古典型定义。

基本性质：

(1)$0\le P(A)\le 1$(2) $P(\Omega)=1$

(3) 有限可加性：若A_1，$A_2....A_n$两两互斥，则$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

(4) 加法定理：若A,B为任意两个随机事件，则$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

(5) $P(\overline{A})=1-P(A)$

离散性随机变量的数学期望：

定义：设离散型随机变量ξ的概率分布为则称$\sum_{i=1}^{n}x_i p_i$,为ξ的数学期望或均值，记作$E(\xi)$

则称$\sum_{i=1}^{n}[x_i-E(\xi)]^2 p_i$,则称此级数的和为$\xi$的方差，记作$D(\xi)$

则称$\sqrt{D(\xi)}$为随机变量ξ的标准差.

ξ	x_1	x_2	...	x_n
$P(\xi=x_i)$	P_1	P_2	...	p_n

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.设50件产品中,45件是正品,5件是次品，从中任取3件求其中至少有1件是次品的概率.(精确到0.01)

【答案解析】

设$A=\{3件产品中至少有1件次品\}$则$\overline{A}=\{3件产品都为品\}$

所以$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{45}^3}{C_{50}^3}\approx 0.28$

2. 设离散型随机变量 X 的概率分布为:

X	0	1	2
P	0.3	0.4	0.3

求 X 的数学期望 EX 及方差 DX.

【答案解析】

$E(X)=0\text{x}0.3+1\text{x}0.4+2\text{x}0.3=1$

$E(X^2)=0\text{x}0.3+1\text{x}0.4+2^2\text{x}0.3=1.6$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1.6-1=0.6$

3. 设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	10	20	30
P	0.2	a	0.2	0.3

(1)求常数 a.
(2)求 X 的数学期望 EX 及方差 DX.

【答案解析】

(1)$0.2+a+0.2+0.3=1\Rightarrow a=0.3$

(2)$EX=0\text{x}0.2+10\text{x}0.3+20\text{x}0.2+30\text{x}0.3=16$

$\mathrm{DX}=(0-16)^2\text{x}0.2+(10-16)^2\text{x}0.3+(20-16)^2\text{x}0.2+(30-16)^2\text{x}0.3=124$

4. 从装有 2 个白球，3 个黑球的袋中任取 3 个球，记取出白球的个数为 X.
(1)求 X 的概率分布.
(2)求 X 的数学期望 E（X）.

【答案解析】

(1)X的可能值为0.1.2

$$P\{X=0\}=\frac{C_2^0.C_3^3}{C_5^3}=0.1$$

$$P\{X=1\}=\frac{C_2^1.C_3^2}{C_5^3}=0.6$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_2^2.C_3^1}{C_5^3}=0.3$$

因此X的概率分布为

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

(2)E(X)=0X0.1+1X0.6+2X0.3=1.2

5. 设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	10	20	30	40
P	0.2	0.1	0.5	a

(1)求常数 a.

(2)求 X 的数学期望 EX.

【答案解析】

(1)0.2+0.1+0.5+a=1,所以 a=0.2

（2）EX=10x0.2+20x0.1+30x0.5+40x0.2=27

第十六个考点对于高数一同学来说在解答题里面是一般考点，一般考察无穷级数的收敛性。

（16）无穷级数（只针对高数一考生）

一、无穷级数：

（一）定义：设有数列$\{u_n\}(n=1,2,\ldots)$,称表达式$u_1+u_2+\ldots u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为无穷级数，简称级数，而称$u_1$为首项，$u_n$为级数的一般项。

（二）收敛与发散

如果数列$\{S_n\}$有极限，即$\lim_{n\to\infty}S_n=S$,则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.极限值S称为级数的和，

或者说级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛收敛于S，记为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$.反之，若极限$\lim_{n\to\infty}S_n$不存在，则称级数发散。

（三）收敛级数的必要条件

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，由此可知：若$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$一定发散

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=0$，级数的收敛性不能判断，如级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛。

（四）绝对收敛与条件收敛

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$一定收敛，此时$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$称为绝对收敛

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，但级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，此时收敛为条件收敛

（五）判定方法

1.比较判别法

若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{v}_n$皆为正项级数，且$0\le u_n\le \mathrm{v}_n(n=1,2,\ldots n)$.则

(1) 若$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{v}_n$收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必收敛。

(2) 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散时,$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{v}_n$必发散。

2.比值判别法（达朗贝尔判别法）

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{为正项级数如果}\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,\ \text{则}\begin{cases}\rho<1\text{时收敛}\\ \rho>1\text{时发散}\\ \rho=1\text{时不定}\end{cases}$$

如果u_n常有因子n，用这种方法判别正项级数的收敛性比较方便

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{5^n}$的收敛性.

【答案解析】

因为$u_n=\frac{5n+1}{5^n}>0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{5(n+1)+1}{5^{n+1}}}{\frac{5n+1}{5^n}}=\frac{1}{5}.\frac{5n+6}{5n+1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}.\frac{5n+6}{5n+1}=\frac{1}{5}<1$,所以原级数收敛。

第十七个考点对于高数一同学来说在解答题里面是必考点，一般考察一阶和二阶微分方程的通解。

（17）常微分方程（只针对高数一同学）

一阶微分方程解法：

(1) 可分离变量的解法

(2) 一阶线性微分方程

$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$的解法，可用公式法求解$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.求微分方程$y\frac{dy}{dx}=x^2$的通解.

【答案解析】

$ydy=x^2dx$

两边同时积分，$\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{3}x^3+C_1$

$3y^2=2x^3+C_1$

即$y^2=\frac{2}{3}x^2+C$

2.求微分方程$y'+\frac{1}{x}y=x$的通解.

【答案解析】

公式法：

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int xe^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=\frac{1}{x}(\int x^2dx+C)$$

$$=\frac{1}{x}(\frac{1}{3}x^3+C)$$

二阶常系数线性微分方程：

$y'' + py' + qy = 0$的通解形式

特征方程$r^2 + pr + q = 0$的根r_1, r_2

(1)$\Delta = p^2 - 4q > 0$,两个不等的实根r_1, r_2，$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

(2)$\Delta = p^2 - 4q = 0$,两个相等的实根r_1, r_2，$y = (C_1 + C_2x)e^{r_1x}$

(3)$\Delta = p^2 - 4q < 0$,一对共轭复根$r_1, r_2 = \alpha \pm \beta i$，$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

若$y = C_1y_1 + C_2y_2$为对应的齐次方程的通解，y^*为非齐次方程的特解

则$C_1y_1 + C_2y_2 + y^*$为非齐次方程的通解

以下是我们历年考试的真题，我们可以进行练习下，掌握上面的知识点，可以帮你快速突破这些真题。

【真题解析】

1.求微分方程$y'' - y' - 2y = e^x$的通解.

【答案解析】

对应得齐次微分方程得特征方程为$r^2 - r - 2 = 0$.特征根$r_1 = -1$，$r_2 = 2$

齐次方程得通解为$Y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$.

设原方程得特解$y^* = Ae^x$，带入原方程可得$A = -\frac{1}{2}$，因此$y^* = -\frac{1}{2}e^x$

故原方程得通解为

$y = Y + y^* = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{2}e^x$（$C_1$，$C_2$为任意常数）.

2.求微分方程$y'' + 3y' + 2y = e^x$的通解.

【答案解析】

$y'' + 3y' + 2y = e^x$对应得齐次微分方程得特征方程为$r^2 + 3r + 2 = 0$.

特征根$r_1 = -2$，$r_2 = -1$，齐次方程得通解为$Y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$.

设原方程得特解$y^* = Ae^x$，带入原方程可得$A = \frac{1}{6}$

故原方程得通解为

$y = Y + y^* = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{6}e^x$（$C_1$，$C_2$为任意常数）.

3.求微分方程$y'' - 5y' - 6y = 0$的通解。

【答案解析】

特征方程为$r^2 - 5r - 6 = 0$,求得$r_1 = -1$或$r_2 = 6$

故微分方程的通解为$y = C_1e^{-x} + C_2e^{6x}$($C_1, C_2$为任意常数)

四、高等数学各部分考点通关练习

（1）无穷小量及无穷大量定义及性质

【课后巩固练习】

1.当$x \to 0$时，下列函数为无穷小量的是（）

$A.e B.\frac{\sin x}{x} C.\cos x D.\sin x$

2.当$x \to 0^{+}$时，下列变量为无穷小量的是（）

$A.e^{\frac{1}{x}} B.\ln x C.x\sin\frac{1}{x} D.\frac{1}{x}\sin x$

3.当$x \to 0$时，下列函数为无穷大 量的是（）

$A.\frac{x}{0.01} B.\sqrt{|x|} C.2^{-x} D.\frac{1+2x}{x}$

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】 D

$A: \lim_{x \to 0} e = e$

$B: \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$C: \lim_{x \to 0} \cos x = 1$

$D: \lim_{x \to 0} \sin x = 0$

答案选D

2.【答案解析】C

A: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x}=+\infty$

B: $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

C: $\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0$

D: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\sin x=1$

答案选C

3.【答案解析】D

A: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{0.01}=0$

B: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|x|}=0$

C: $\lim\limits_{x\to 0}2^{-x}=1$

D: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}+2)=\infty$

答案选D

（2）无穷小量的比较及替换

【课后巩固练习】

1.设$f(x)=2x^2, g(x)=\sin x$,则当$x\to 0$时（）

$A.f(x)$是比$g(x)$高阶的无穷小量

$B.f(x)$是比$g(x)$低阶的无穷小量

$C.f(x)$与$g(x)$同阶但非等价的无穷小量

$D.f(x)$与$g(x)$是等价无穷小量

2.设$f(x)=e^{-x^2}-1, g(x)=x^2$,则当$x\to 0$时（）

$A.f(x)$是比$g(x)$高阶的无穷小量

$B.f(x)$是比$g(x)$低阶的无穷小量

$C.f(x)$与$g(x)$同阶但非等价的无穷小量

$D.f(x)$与$g(x)$是等价无穷小量

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】A

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sin x}=\lim_{x\to 0}2x=0$$

答案选A

2.【答案解析】C

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2}=-1$$

答案选C

（3）两个重要极限

【课后巩固练习】

1.下列格式正确的是（）

$A.\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1 B.\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=1 C.\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0 D.\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}=0$

2.极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n}=$

$A.e^{-3} B.e^{-\frac{1}{3}} C.e^{\frac{1}{3}} D.e^{3}$

3.求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$

4.设极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^{a}$, 则 $a=()$

$A.-2 B.-\frac{1}{2} C.\frac{1}{2} D.2$

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】D

$A:\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}.\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=0\neq 1,$ 错误

$B:\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2\neq 1,$ 错误

$C:\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\neq 0,$ 错误

$D:\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}.\lim\limits_{x\to\infty}\sin 2x=0,$ 正确

2.【答案解析】A

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{-\frac{n}{3}.(-3)}=e^{-3}$$

3.【答案解析】

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}.6}=e^{6}$$

4.【答案解析】D

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}.2}=e^{2}=e^{a}$$

$a=2$

（4）函数连续性

【课后巩固练习】

1.已知函数$f(x)=\begin{cases}(1+5x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0 \\ a, x=0\end{cases}$在点$x=0$处连续，求$a$.

2.设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}, & x<0 \\ x+2, x\geq 0\end{cases}$,讨论$f(x)$在$x=0$处的连续性.

3.求常数a的值，使函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{x}, & x<0 \\ 1+x^2, x\geq 0\end{cases}$在$x=0$处连续.

4.设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}, & x\neq 0 \\ k, x=0\end{cases}$在点$x=0$处连续，则$k=$( )

$A.0 \quad B.\frac{1}{4} \quad C.\frac{1}{2} \quad D.2$

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】连续性定义，函数在$x=0$处连续

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}=f(0)=a$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5}=e^5=a$

2.【答案解析】

考察连续性定义

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=0+2=2$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}$（分母有理化）

$=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+\sqrt{1-x})=2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$

所以$f(x)$在$x=0$处连续.

3.【答案解析】

连续性定义：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

由于在$x=0$处连续

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x^2)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin ax}{x}$$

$$1+0=\frac{ax}{x}=a$$

$$a=1$$

4.【答案解析】

连续性定义，函数在$x=0$处连续

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}=f(0)=k$$

$$k=\frac{1}{4}$$

（5）函数间断点

【课后巩固练习】

1.函$\mathrm{f}(x)=\dfrac{x+1}{x-1}+e^{\frac{2}{x}}$的所有间断点是（）

$A.x=0B.x=1C.x=0,x=1D.x=-1,x=1$

2.函数$\mathrm{f}(x)=\dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)}$的所有间断点为（）

$A.x=-1Bx=2C.x=3D.x=2,x=3$

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】C

$x-1=0$,即$x=1$时，另外$x=0$，函数$\mathrm{f}(x)$无定义，则函数$\mathrm{f}(x)$的间断点是$x=1$，$x=0$

2.【答案解析】D

$x-2=0$,即$x=2$时;另外$x-3=0$,即$x=3$时,函数$\mathrm{f}(x)$无定义,

则函数$\mathrm{f}(x)$的间断点是$x=2$，$x=3$

（6）导数定义公式

【课后巩固练习】

1.设函数$f(x)$在点x_0处可导，且$f^{'}(x_0)=\frac{1}{3}$求极限$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{h}$

2.设函数$f(x)=x^2$,则极限$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=()$

$A.5B.10C.15D.20$

3.设函数$f(x)$在$x=1$处可导，则$f^{'}(1)=()$

$A.\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}B.\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(1)}{x}$

$C.\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x}D.\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

4.设函数$f(x)$可导，则极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+2\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$

$A.\frac{1}{2}f^{'}(x)B.-\frac{1}{2}f^{'}(x)C.2f^{'}(x)d.-2f^{'}(x)$

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{h}=\text{-}3\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{\text{-}3h}=\text{-}3f^{'}(x_0)=\text{-}3\text{x}\frac{1}{3}=\text{-}1$

2.【答案解析】B

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=f^{'}(5)$，又$f(x)=x^2\Rightarrow f(x)=2x\Rightarrow f^{'}(5)=2\text{x}5=10$

3.【答案解析】D

函数$f(x)$在$x=1$处可导$\Rightarrow f^{'}(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

4.【答案解析】C

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+2\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+2\Delta x)-f(x)}{2\Delta x}=2f^{'}(x)$

（7）导数的几何意义

【课后巩固练习】

1.设曲线$y=ax^2+2x$在点（1，$a+2$)处的切线与直线$y=4x$平行，则$a=$____

2.曲线$y=x^2-x$在点（1,0)处的切线斜率为____

3.曲线$y=\sin(x+1)$在点（-1,0)处的切线斜率为____

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】曲线在点处的切线与直线$y=4x$平行$\Rightarrow k=y'\big|_{x=1}=2ax+2=2a+2=4\Rightarrow a=1$

2.【答案解析】$k=y'\big|_{x=1}=2x-1\big|_{x=1}=1$

3.【答案解析】$k=y'\big|_{x=-1}=\cos(x+1)\big|_{x=-1}=1$

（8）求导方法

【课后巩固练习】

1.设$y=5^n$，则$y'=$______

2.设$y=x+\cos x$,则$y'=$______

3.设$y=x^2e^x$,则$y'=$______

4.设$y=\frac{e^x}{x}$,则$y'=$______

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】$y'=5^n\ln 5$

2.【答案解析】$y'=1-\sin x$

3.【答案解析】$y'=2xe^x+x^2e^x$

4.【答案解析】$y'=\frac{e^x x-e^x}{x^2}$

(9)复合函数求导

【课后巩固练习】

1.设函数$y=\sin(\ln x)$,求y'

2.设函数$f(x)=\ln(\cos x)$,求y'

3.设函数$f(x)=\cos(2x^2+6x)$,求y'

4.已知函数$y=2^{\ln(x^2+1)}$,求y'.

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】$y=\sin(\ln x)$

$$y'=\cos(\ln x).(\ln x)'=\frac{\cos(\ln x)}{x}$$

2.【答案解析】$f(x)=\ln(\cos x)$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos x}(\cos x)'=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

3.【答案解析】$f(x)=\cos(2x^2+6x)$

$$f'(x)=-\sin(2x^2+6x).(2x^2+6x)'=\text{-}(4x+6)\sin(2x^2+6x)$$

4.【答案解析】$y=2^{\ln(x^2+1)}$

$$y'=2^{\ln(x^2+1)}.\ln 2.[\ln(x^2+1)]'=2^{\ln(x^2+1)}.\ln 2.\frac{1}{x^2+1}.(x^2+1)'=2^{\ln(x^2+1)}.\ln 2.\frac{2x}{x^2+1}$$

(10)隐函数求导

【课后巩固练习】

1.设$\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$（$t$为参数），求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}$.

2.设$\begin{cases} x=2t^2+1 \\ y=\sin t \end{cases}$（$t$为参数），求$\dfrac{dy}{dx}$.

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3t}{2},\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\frac{3}{2}$$

2.【答案解析】

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{4t}$$

【课后巩固练习】

1.函数$\mathrm{y}=\mathrm{y}(\mathrm{x})$是由方程$\mathrm{y}=\sin(x+y)$所确定的隐函数，求$y'$.

2.若由$e^y=xy$确定y是x的函数，则$y'=$____

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$\mathrm{y}=\sin(x+y)$，两边同时对x求导，得

$$y'=\cos(x+y).(1+y')\Rightarrow y'=\frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$$

2.【答案解析】

$e^y=xy$,两边同时对x求导，得

$$e^y.y'=y+xy'\Rightarrow y'=\frac{y}{e^y-x}$$

(11)高阶求导

【课后巩固练习】

1.$y=x^3+2$,求$y''=$____

2.设$y=\sin x$,求$y''=$____

3.设$y=e^{-x}$,求$y''=$____

4.设$f(x)=e^{2x}$,求$y'''=$____

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$y=x^3+2\Rightarrow y'=3x^2\Rightarrow y''=6x$

2.【答案解析】

$y=\sin x\Rightarrow y'=\cos x\Rightarrow y''=-\sin x$

3.【答案解析】

$y=e^{-x}\Rightarrow y'=-e^{-x}\Rightarrow y''=e^{-x}$

4.【答案解析】

$y=e^{2x}\Rightarrow y'=2e^{2x}\Rightarrow y''=4e^{2x}\Rightarrow y'''=8e^{2x}$

(12)微分【课后巩固练习】

1.设$y=3\ln x$,则$dy=$____

A.$\frac{3}{x}dx$ B.$3e^{x}dx$ C.$\frac{1}{3x}dx$ D.$\frac{1}{3}e^{x}dx$

2.设$y=e^{x-3}$,则$dy=$____

3.设$y=x+\ln x$,则$dy=$____

4.设函数$y=\cos x+1$,则$dy=$____

5.设函数$y=e^{-3x}$,则$dy=$____

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$$y=3\ln x\Rightarrow y'=\frac{3}{x}\Rightarrow dy=\frac{3}{x}dx$$

2.【答案解析】

$$y=e^{x-3}\Rightarrow y'=e^{x-3}\Rightarrow dy=e^{x-3}dx$$

3.【答案解析】

$$y=x+\ln x\Rightarrow y'=1+\frac{1}{x}\Rightarrow dy=(1+\frac{1}{x})dx$$

4.【答案解析】

$$y=\cos x+1\Rightarrow y'=-\sin x\Rightarrow dy=-\sin xdx$$

5.【答案解析】

$$y=e^{-3x}\Rightarrow y'=-3e^{-3x}\Rightarrow dy=-3e^{-3x}dx$$

(13)洛必达法则【课后巩固练习】

1.计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}$.

2.计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$.

3.计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-e^x}{\sin x}$.

4.计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{x^3-1}$.

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

"$\dfrac{0}{0}$" 型，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}$

2.【答案解析】

"$\dfrac{0}{0}$" 型，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\cos x}=2$

3.【答案解析】

"$\dfrac{0}{0}$" 型，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^{-x}-e^x}{\cos x}=-2$

4.【答案解析】

"$\dfrac{0}{0}$" 型，原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1+\dfrac{1}{x}}{3x^2}=0$

(14) 导数的应用

【课后巩固练习】

1.设函数$f(x)=x-\ln x$,求$f(x)$的单调增区间.

2.函数$y=\frac{1}{3}x^3-x$的单调减少区间为____.

3.求函数$y=\frac{1}{3}x^3-4x+1$的单调区间及极值、凹凸区间.

4.求函数$f(x)=x^2-\frac{2}{x}$的单调区间及极值极值、凹凸区间.

5.曲线$y=x^3+3x^2+1$的拐点坐标为____

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

定义域为$x>0$，即（$0,+\infty$），$f'(x)=1-\frac{1}{x}$,令$f'(x)>0\Rightarrow 1-\frac{1}{x}>0$

$\Rightarrow(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

2.【答案解析】

$f'(x)=x^2-1$,令$f'(x)<0\Rightarrow x^2-1<0\Rightarrow(-1,1)$

3.【答案解析】

$y=\frac{1}{3}x^3-4x+1$的定义域为（$-\infty,+\infty$）

$y'=x^2-4$,令$y'=0$，$x=\pm2$

$y''=2x$,令$y''=0$，$x=0$

列表如下：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	−		−	0	+
y''	−		−	0	+		+
y		极大值				极小值	

极大值为$f(-2)=\frac{19}{3}$极小值为$f(2)=\frac{13}{3}$

单调增区间为（$-\infty,-2$）$\cup$（$2,+\infty$）单调减区间为（$-2,2$）

凹区间为（$0,+\infty$）凸区间为（$-\infty,0$）

4.【答案解析】

$f(x)$的定义域为（$-\infty,0)\cup(0,+\infty$）

$f'(x)=2x+\dfrac{2}{x^2}$，令$f'(x)=0$，得$x=-1$

$f''(x)=2-\dfrac{4}{x^3}$，令$f''(x)=0$，得$x=\sqrt[3]{2}$列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	$(0,\sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2},+\infty)$
y'	−	0	+	+	+	+
y''	+	+	+	−	0	+
y		极小				

极小值$f(-1)=3$

凹区间$f''(x)<0$，　$(0,\sqrt[3]{2})$

凸区间$f''(x)>0$，　$(-\infty,0)\cup(\sqrt[3]{2},+\infty)$

5.【答案解析】

$y'=3x^2+6x$，令$y'=0$，$x=0$或$x=-2$

$y''=6x+6$，令$y''=0$，$x=-1$

列表如下：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y				拐点			

$(-1)^3+3\text{x}(-1)^2+1=3$

所以拐点坐标为（-1,3）

(15)曲线的水平渐近线与铅直渐近线

【课后巩固练习】

1.曲线$y=\dfrac{x+1}{x-1}$的铅直渐近线为（）

$A.x=-1 B.x=1 C.y=-1 D.y=1$

2.曲线$y=\dfrac{1}{1-x^2}$的铅直渐近线条数为（）

$A.1 B.2 C.3 D.4$

3.曲线$y=\dfrac{3x-1}{x-1}$的水平渐近线为______

4.曲线$y=\dfrac{x}{x^2-1}$的水平渐近线为______

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}=\infty\Rightarrow x=1$$

2.【答案解析】

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{1-x^2}=\infty\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x=\pm 1$$

3.【答案解析】

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=3\Rightarrow y=3$$

4.【答案解析】

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=0\Rightarrow y=0$$

(16)不定积分的性质及公式

【课后巩固练习】

1.$\int 5\cos x\mathrm{d}x=$ ____

2.$\int 3x\mathrm{d}x=$ ____

3.$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=$ ____

4.$\int (1-\frac{1}{x})\mathrm{d}x=$ ____

5.$\int \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=$ ____

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】$\int 5\cos xdx=5\sin x+C$

2.【答案解析】$\int 3xdx=\frac{3}{2}x^2+C$

3.【答案解析】$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$

4.【答案解析】$\int (1-\frac{1}{x})dx=\int 1dx-\int \frac{1}{x}dx=x-\ln|x|+C$

5.【答案解析】$\int \frac{1}{x^3}dx=-\frac{1}{2}x^{-2}+C$

(17)求不定积分的常用方法

【课后巩固练习】

1.计算$\int x\sqrt{x^2-1}dx$.

2.计算$\int \frac{1}{x(1+x)}dx$.

3.计算$\int \frac{1+\ln x}{x}dx$.

4.计算$\int \arcsin x dx$.

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$$\int x\sqrt{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-1}dx^2=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-1}d(x^2-1)=\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

2.【答案解析】

$$\int\frac{1}{x(1+x)}dx=\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x})dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{1+x}dx=\ln|x|-\ln|x+1|+C$$

3.【答案解析】

$$\int\frac{1+\ln x}{x}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{\ln x}{x}dx=\ln|x|+\int\ln x d\ln x=\ln|x|+\frac{1}{2}\ln^2 x+C$$

4.【答案解析】

$$\int\arcsin x dx=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$$

(18)定积分

【课后巩固练习】

1. $\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx=$____

2. $\int_{0}^{1}(\sqrt{x}+x^{2})dx=$____

3. $\int_{-1}^{1}x^{5}dx=$____

4. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin xdx=$____

5. $\int_{1}^{+\infty}e^{-x}dx=$____

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$$\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_{1}^{2}=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$

2.【答案解析】

$$\int_{0}^{1}(\sqrt{x}+x^{2})dx=\int_{0}^{1}\sqrt{x}dx+\int_{0}^{1}x^{2}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1}+\frac{1}{3}x^{3}\Big|_{0}^{1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$

3.【答案解析】

$$\int_{-1}^{1}x^{5}dx=\frac{1}{6}x^{6}\Big|_{-1}^{1}=0$$

4.【答案解析】

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

5.【答案解析】

$$\int_{1}^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_{1}^{+\infty}=\frac{1}{e}$$

(19)定积分的几何意义

【课后巩固练习】

1.设L是曲线$y=x^2+3$在点（1,4）处的切线，求由该曲线、切线L及y轴围成的平面图形的面积S.

2.已知函数$y=-x^2+2x$，求曲线与x轴围成的平面图形的面积S.

3.设D是由直线$y=x$与$y=x^3$在第一象限所围成的图形，求D的面积S

4.设D为曲线$y=1-x^2$，直线$y=x+1$，与x轴围成的平面图形，求D的面积S

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$y'=2x, k=2,$切线方程$y=2x+2$

$$S=\int_0^1\left[(x^2+3)-(2x+2)\right]dx=(\frac{1}{3}x^3-x^2+x)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

2.【答案解析】

$$S=\int_0^2(-x^2+2x)dx=-\frac{1}{3}x^3+x^2\Big|_0^2=\frac{4}{3}$$

3.【答案解析】

$$S=\int_0^1(x-x^3)dx=(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4)\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

4.【答案解析】

$$S=\int_{-1}^0(x+1)dx+\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{1}{2}(x+1)^2\Big|_{-1}^0+(x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^1=\frac{7}{6}$$

(20)多元函数偏导数

【课后巩固练习】

1.设$z=x^2y$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=$_____

2.设函数$z=x^3+y^3$,则$\frac{\partial z}{\partial y}=$___

3.设$z=\arcsin x+e^y$,则$\frac{\partial z}{\partial y}=$_____

4.设$z=x^2y+xy^2$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=$_____

5.设函数$z=\sin(xy)$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=$_____

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$z=x^2y\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=2xy$

2.【答案解析】

$z=x^3+y^3\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2$

3.【答案解析】

$z=\arcsin x+e^y\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=e^y$

4.【答案解析】

$z=x^2y+xy^2\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+y^2$

5.【答案解析】

$z=\sin(xy)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)$

（21）二元函数极值

【课后巩固练习】

1.设函数$z=e^x+y^2$,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$____

2.求二元函数$f(x,y)=x^2+y^2+2y$的极值.

3.设函数$z=x^2y^3$,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$____

4.设函数$z=xy$,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____

5.设函数$z=\ln(xy)$,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$____

6.设函数$z=x^2y-xy^3$,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$$z=e^x+y^2\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x$$

2.【答案解析】

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\frac{\partial f}{\partial y}=2y+2$$

$$\begin{cases}2x=0\\2y+2=0\end{cases}\Rightarrow \text{驻点（0,-1）}$$

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2,\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

$\mathrm{A}>0,\mathrm{B}^2-AC=-4<0$

$f(x,y)$在点（0,-1）处取得极小值，f（0,-1）=-1

3.【答案解析】

$$z=x^2y^3\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y^3$$

4.【答案解析】

$$z=xy\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=y\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1$$

5.【答案解析】

$$z=\ln(xy)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{xy}=\frac{1}{y}\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}$$

6.【答案解析】

$$z=x^2y-xy^3\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=2xy-y^3\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x-3y^2$$

(22)全微分

【课后巩固练习】

1.$z=x^2-y$,则$dz=$____

2.设函数$z=x^3e^x$,则$dz=$____

3.设函数$z=e^x+y$,则$dz=$____

4.设函数$z=2x+y^2$,则$dz=$____

5.设函数$z=x^2y+2y^2$,求dz.

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$$z=x^2-y,\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\frac{\partial z}{\partial y}=-1\Rightarrow dz=2xdx-dy$$

2.【答案解析】

$$z=x^3e^y,\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2e^y,\frac{\partial z}{\partial y}=x^3e^y\Rightarrow dz=3x^2e^ydx+x^3e^ydy$$

3.【答案解析】

$$z=e^x+y,\frac{\partial z}{\partial x}=e^x,\frac{\partial z}{\partial y}=1\Rightarrow dz=e^xdx+dy$$

4.【答案解析】

$$z=2x+y^2,\frac{\partial z}{\partial x}=2,\frac{\partial z}{\partial y}=2y\Rightarrow dz=2dx+2ydy$$

5.【答案解析】

$$z=x^2y+2y^2,\frac{\partial z}{\partial x}=2xy,\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+4y\Rightarrow dz=2xydx+(x^2+4y)dy$$

(23)概率初步（只针对高数二考生）

【课后巩固练习】

1.任意三个事件，M,N,K中至少有一个发生的是（）

$A.M\cup N\cup K B.M\cup N\cap K C.M\cap N\cap K D.M\cap N\cup K$

2.有10件产品，其中8件是正品,2件是次品，甲、乙两人先后各抽取一件产品

求甲先抽到正品的前提下，乙抽到正品的概率。

3.袋中有8个乒乓球，其中5个白色球,3个黄色球，从中1次任取2个乒乓球，则取出的

2个球均为白球的概率为 ____

4.设A, B为两个随机事件，且$P(A)=0.8, P(AB)=0.3$,求$P(A-B)$.

5. 设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	0.2	0.1	0.3	a

(1)求常数 a.

(2)求 X 的数学期望 EX.

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】A

2.【答案解析】

$$P=\frac{C_7^1}{C_9^1}=\frac{7}{9}$$

3.【答案解析】

$$P=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}$$

4.【答案解析】

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.8-0.3=0.5$$

5.【答案解析】

$(1)0.2+0.3+0.1+a=1\Rightarrow a=0.4(2)EX=0\text{x}0.2+1\text{x}0.1+2\text{x}0.3+3\text{x}0.4=1.9$

(24)常微分方程

【课后巩固练习】

1.求微分方程$y''+3y'+2y=6e^x$的通解.

2.微分方程$dy+xdx=0$的通解$y=$____

3.求$y'-\frac{1}{x}y=x^2$的通解.

4.微分方程$y'-y=0$的通解为____

5.微分方程$y'=3x^2y$的通解$y=$____

6.求微分方程$y''+3y'+2y=0$的通解.

【课后练习答案解析】

1.【答案解析】

$y''+3y'+2y=6e^x$对应得齐次微分方程得特征方程为$r^2+3r+2=0$.

特征根$r_1=-2$，$r_2=-1$，齐次方程得通解为$Y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$.

设原方程得特解$y^*=Ae^x$，带入原方程可得$A=1$

故原方程得通解为

$y=Y+y^*=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+e^x$（$C_1$，$C_2$为任意常数）.

2.【答案解析】

$dy=-xdx\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x^2+C$

3.【答案解析】

公式法：

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]=e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\left[\int x^2e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=x\left[\int xdx+C\right]$$

$$x(\frac{x^2}{2}+C)=\frac{x^3}{2}+Cx$$

$4.dy=-xdx\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x^2+C$

4.【答案解析】

$y'-y=0\Rightarrow y'=y\Rightarrow\frac{1}{y}dy=dx\Rightarrow\ln y=x\Rightarrow y=Ce^x$

5.【答案解析】

$y'=3x^2y\Rightarrow\frac{1}{y}dy=3x^2dx\Rightarrow\ln y=x^3\Rightarrow y=Ce^{x^3}$

6.【答案解析】

$y''+3y'+2y=0$对应得齐次微分方程得特征方程为$r^2+3r+2=0$.

特征根$r_1=-2$，$r_2=-1$，齐次方程得通解为$Y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$.

故原方程得通解为

$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$（C_1，C_2为任意常数）.