全国各类成人高等学校招生考试

专科起点升本科

高等数学(一)全真模拟试卷(一)

(考试时间 120 分钟)

题　号	一	二	三	总　分	
题　分	40	40	70	统分人	
得　分				核分人	

得　分	阅卷人	核分人

一、选择题(在每题给出的四个选项中只有一项符合题目要求.每题 4 分,共 40 分.)

1. 设 $z=xy+e^{\frac{x}{y}}$,则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=$ 【　】

A. -1　　B. 0

C. 2　　D. 1

2. 设 $\sin x$ 为 $f(x)$ 的原函数,则 $f'(x)=$ 【　】

A. $-\sin x$　　B. $\sin x$

C. $-\cos x$　　D. $\cos x$

3. 函数 $y=x^2-x+1$ 在区间$[-1,4]$上满足拉格朗日中值定理的 $\xi=$ 【　】

A. $-\frac{3}{4}$　　B. 0

C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{3}{2}$

4. 下列广义积分中收敛的是 【　】

A. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　B. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$

C. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x$

5. 下列微分方程中,可分离变量的是 【　】

A. $xy\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=xy^2\mathrm{d}x$　　B. $xy'-\cos x=yy'$

C. $\frac{dy}{dx}=x\sin(x+y)$

D. $(y^2+xy)dx=x^2dy$

6. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{x}\right)^x=$ 【 】

A. $e^{\frac{1}{2}}$

B. e

C. e^2

D. 1

7. 当 $x\to 0$ 时,下列各组函数中是等价无穷小的是 【 】

A. $\sin 3x$ 与 $3x^2$

B. $\ln(1+2x)$ 与 x

C. $1-\cos x$ 与 x^2

D. $2(\sqrt{1+x}-1)$ 与 x

8. 函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-e^x}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ 【 】

A. -1

B. 1

C. 0

D. 2

9. 设 $f(x)=e^{-x}$,则 $\int\frac{f'(\ln x)}{x}dx=$ 【 】

A. $\ln x+C$

B. $-\ln x+C$

C. $\frac{1}{x}+C$

D. $-\frac{1}{x}+C$

10. 设 $f(x)$ 为连续函数,则 $\frac{d}{dx}\int_a^{x^2}f(2t)dt=$ 【 】

A. $f(2x^2)$

B. $x^2f(2x^2)$

C. $2xf(x^2)$

D. $2xf(2x^2)$

得 分	阅卷人	核分人

二、填空题(将答案填在横线上.每题 4 分,共 40 分.)

11. 如果 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^p}=\frac{1}{2}$,则 $p=$________.

12. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$,则 $f'(4)=$________.

13. 若 $y=ax$ 为 $y=\ln x$ 的切线,则 $a=$________.

14. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}x(1+\frac{x}{t})^t$,则 $f'(x)=$________.

15. 定积分 $\int_{-1}^{1}\frac{(\arctan x)^3}{1+x^2}dx=$________.

16. $\int\frac{x}{\sqrt{x+2}}dx=$____________.

17. 设 $z=x^2y^2+3x$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$_______________.

18. 以空间两点 $M_1(1,2,-1)$ 与 $M_2(2,0,3)$ 为端点的线段的垂直平分面的方程为_______________.

19. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=2$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 的收敛半径为__________.

20. 微分方程 $y'-2y=3$ 的通解为____________.

得 分	阅卷人	核分人

三、解答题(应写出推理演算步骤.共 70 分.)

21.(本题满分 8 分)

设 $\begin{cases}x=te^{\frac{1}{t}}\\ y=e^{\frac{1}{t}}-1\end{cases}$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2}$.

22.(本题满分 8 分)

求 $\int_{-1}^{4}x\sqrt{|x|}\,\mathrm{d}x$.

23.(本题满分 8 分)

设 $z=z(x,y)$ 由 $e^z-xyz=1$ 确定,求 dz.

24.(本题满分 8 分)

求微分方程 $y''-y'=0$ 的积分曲线方程,使其在 $(0,0)$ 处与直线 $y=x$ 相切.

25.(本题满分 8 分)

将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数并指明收敛区间.

26.(本题满分 10 分)

求由曲线 $x^2+y^2=2y$, $y=\dfrac{x^2}{2}$ 及直线 $y=2$ 在第一象限所围图形的面积.

27.(本题满分 10 分)

求$\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy$,其中 D 由 $y=x$ 及 $y=x^2$ 所围.

28.(本题满分 10 分)

将周长为 12 的矩形绕其一边旋转得一圆柱体,问绕边长为多少的边旋转时才能使所得圆柱体的体积最大.

高等数学(一)全真模拟试卷(一)参考答案

一、选择题

1.C　2.A　3.D　4.A　5.A　6.C　7.D　8.A　9.C　10.D

二、填空题

11.3

12.24

13.e^{-1}

14.$(1+x)e^{x}$

15.0

16.$\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}-4\sqrt{x+2}+C$

17.$2xy(x+y)+3$

18.$2x-4y+8z-7=0$

19.$\sqrt{2}$

20.$y=Ce^{2x}-\frac{3}{2}$

三、解答题

21. **解:** $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=2}=\left.\left(e^{\frac{1}{t}}-\frac{1}{t}e^{\frac{1}{t}}\right)\right|_{t=2}=\frac{1}{2}\sqrt{e}$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=2}=-\left.\frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}}\right|_{t=2}=-\frac{1}{4}\sqrt{e}$$

$$\therefore \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2}=\frac{-\frac{1}{4}\sqrt{e}}{\frac{1}{2}\sqrt{e}}=-\frac{1}{2}$$

22. **解:** 原式$=\int_{-1}^{1}x\sqrt{|x|}\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

$\because x\sqrt{|x|}$在$[-1,1]$上为连续奇函数

$$\therefore \int_{-1}^{1}x\sqrt{|x|}\,\mathrm{d}x=0$$

又$\int_{1}^{4}x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int_{1}^{4}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\left.\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right|_{1}^{4}=\frac{62}{5}$

$$\therefore \int_{-1}^{4} x\sqrt{|x|}\,dx=\frac{62}{5}$$

23. **解**:设 $F(x,y,z)=e^{z}-xyz-1=0$

$$F'_x=-yz,F'_y=-xz,F'_z=e^{z}-xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{e^{z}-xy},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{e^{z}-xy}$$

$$\therefore dz=\frac{z}{e^{z}-xy}(y\,dx+x\,dy)$$

24. **解**:原方程的特征方程为 $r^{2}-r=0$

特征根为 $r_1=0,r_2=1$ 故通解为

$y=C_1+C_2e^{x}$

由题知 y 过(0,0)且 $y'(0)=1$,将(0,0)代入上式

$C_1+C_2=0$,由 $y'=C_2e^{x}$ 得

$C_2=1$

$\therefore C_1=-1$

$\therefore$ 所求为 $y=e^{x}-1$

25. **解**:$f(x)=\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2+(x-1)}=\dfrac{1}{2}\ \dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}}$

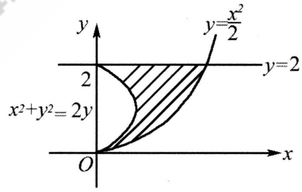
$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^{2}}{2^{2}}+\cdots+\frac{(x-1)^{n}}{2^{n}}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n}}{2^{n+1}}$$

由 $\left|\dfrac{x-1}{2}\right|<1$,有 $-1<x<3$

$\therefore$ 收敛区间为 $(-1,3)$

26. **解**:如图所示



$$S=\int_{0}^{2}(\sqrt{2y}-\sqrt{2y-y^{2}})dy$$

$$=\int_{0}^{2}\sqrt{2y}\ dy-\int_{0}^{2}\sqrt{2y-y^{2}}\ dy$$

$$\int_{0}^{2}\sqrt{2y}\ dy=\sqrt{2}\int_{0}^{2}y^{\frac{1}{2}}dy$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{2}=\frac{8}{3}$$

对$\int_0^2 \sqrt{2y-y^2}\,dy=\int_0^2 \sqrt{1-(y-1)^2}\,d(y-1)$，令 $t=y-1$

x	0	2
t	-1	1

$\therefore \int_0^2 \sqrt{1-(y-1)^2}\,d(y-1)=\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$

再令 $t=\sin u$，则 $dt=\cos u\,du$

t	-1	1
u	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u\cdot\cos u\,du=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du$$

$$=2\cdot\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\sin 2u\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

$\therefore S=\frac{8}{3}-\frac{\pi}{2}$

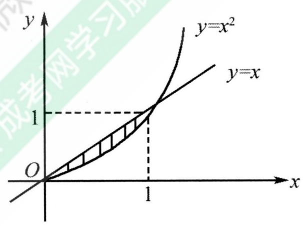
27. **解**：如图所示

$$原式=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}\frac{\sin x}{x}\,dy=\int_0^1 (1-x)\sin x\,dx$$

$$=\int_0^1 (x-1)\,d\cos x$$

$$=(x-1)\cos x\Big|_0^1-\int_0^1 \cos x\,d(x-1)$$

$$=1-\sin x\Big|_0^1=1-\sin 1$$



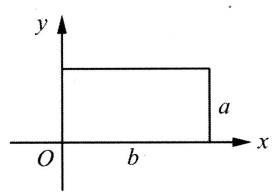
28. **解**：如图所示

设矩形边长为 a,b，绕 x 轴旋转形成圆柱体体积 $V=\pi a^2 b$

由已知 $a+b=6$

$\therefore V=\pi a^2(6-a)=6\pi a^2-\pi a^3$

令 $V'=12\pi a-3\pi a^2=3\pi a(4-a)=0$



得 $a=0$(舍)或 $a=4$

当 $a>4$ 时 $V'<0$,$V\downarrow$

当 $a<4$ 时 $V'>0$,$V\uparrow$

$\therefore V$ 在 $a=4$ 处取极大值即最大值.

答:矩形边长为 4 和 2,且绕边长为 2 的一边旋转能使所得圆柱体体积最大.