全国各类成人高等学校招生考试

专科起点升本科

高等数学(一)全真模拟试卷(二)

(考试时间 120 分钟)

题　号	一	二	三	总　分	
题　分	40	40	70	统分人	
得　分				核分人	

得 分	阅卷人	核分人

一、选择题(在每题给出的四个选项中只有一项符合题目要求.每题 4 分,共 40 分.)

1. 设 $f'(x)$为连续函数,则 $\int_0^2 f'\left(\frac{x}{6}\right)\mathrm{d}x=$ 【　】

A. $f(2)-f(0)$　　B. $6[f(2)-f(0)]$

C. $6[f(6)-f(0)]$　　D. $6\left[f\left(\frac{1}{3}\right)-f(0)\right]$

2. 设 $x=1$ 为 $y=x^3-x^2-ax$ 的极小值点,则 $a=$ 【　】

A. 3　　B. 1

C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

3. 设 $y=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$,则 $y''|_{x=0}=$ 【　】

A. -3　　B. 3

C. -1　　D. 1

4. 设 $k>0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k}{n}$ 【　】

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛

C. 发散　　D. 无法确定敛散性

5. $y''-2y'-3y=0$ 的通解是 【　】

A. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$　　B. $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$

C. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$　　　　D. $y=e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$

6. 设 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，则 $f(x)$ 为　　【　　】

A. x^2-1　　　　B. x^2-2

C. $x-\frac{1}{x}$　　　　D. $x+\frac{1}{x}$

7. 当 $x\to 0$ 时，下列变量中为无穷小的是　　【　　】

A. $\lg|x|$　　　　B. $\sin\frac{1}{x}$

C. $\cot x$　　　　D. $\sqrt{1+x}-1$

8. 设函数 $f(x)$ 满足 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$，且 $f(0)=0$，则 $f(x)=$　　【　　】

A. $\cos x+\frac{1}{2}\cos^2 x$　　　　B. $\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x$

C. $\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin^4 x$　　　　D. $x-\frac{1}{2}x^2$

9. 设函数 $f(\sin x)=x\,(0<x<\frac{\pi}{2})$，则 $f'(x)=$　　【　　】

A. $-\sin x$　　　　B. $\cos x$

C. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　　　D. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $x^2e^{\frac{1}{x}}$，则 $f(x)=$　　【　　】

A. $2x-e^{\frac{1}{x}}$　　　　B. $(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$

C. $(2x+1)e^{\frac{1}{x}}$　　　　D. $2xe^{\frac{1}{x}}$

得　分	阅卷人	核分人

二、填空题(将答案填在横线上．每题 4 分，共 40 分．)

11. $y=\log_{x-1}(16-x^2)$ 的定义域是__________.

12. 函数 $f(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ \frac{a+x^2}{6} & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$__________.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\sin\frac{4}{x}}=$__________.

14. $y=\cos(e^{\frac{1}{x}})$，则 $dy=$__________.

15. 设 $y''=\cos x$，则 $y=$______.

16. $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx=$______.

17. 通过点 $A(1,2,3)$ 且与直线$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$垂直的平面方程为______.

18. $\int \sec^2 5x\,dx=$______.

19. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx=$______.

20. 设 D 为 $x^2+y^2\leqslant 4$ 且 $y\geqslant 0$，则$\iint\limits_D 2dxdy=$______.

得 分	阅卷人	核分人

三、解答题(应写出推理演算步骤. 共 70 分.)

21.(本题满分 8 分)

设 $y=x^2\cos x+2^x+e^e$，求 y'.

22.(本题满分 8 分)

设 $f(x,y)=\ln(y+\frac{x^2}{2y})$，求 $f'_y(1,1)$.

23.(本题满分 8 分)

设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 确定函数 $z=f(x,y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$.

24.（本题满分 8 分）

设 $f(x)+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x^2$，求 $f(x)$.

25.（本题满分 8 分）

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛区间.

26.（本题满分 10 分）

求微分方程 $y''+4y'+4y=xe^{2x}$ 的通解.

27.(本题满分 10 分)

求由曲线 $y^2=(x-1)^3$ 和直线 $x=2$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

28.(本题满分 10 分)

求证:$4x-1-\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}=0$ 在区间$(0,1)$内有唯一实根.

高等数学(一)全真模拟试卷(二)参考答案

一、选择题

1.D　2.B　3.A　4.B　5.C　6.B　7.D　8.D　9.C　10.B

二、填空题

11. $(1,2)\cup(2,4)$

12. 6

13. $\frac{1}{2}$

14. $\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\sin(e^{\frac{1}{x}})\mathrm{d}x$

15. $-\cos x+Cx+C_1$

16. $1-\frac{\pi}{4}$

17. $3x+2y+z-10=0$

18. $\frac{1}{5}\tan 5x+C$

19. $1-\frac{\pi}{4}$

20. 8π

三、解答题

21. **解**:$y'=2x\cos x-x^2\sin x+2^x\ln 2$

22. **解**:$f'_y=\dfrac{1}{y+\dfrac{x^2}{2y}}\cdot\left[1+\dfrac{x^2}{2}\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)\right]$

令 $x=1,y=1$ 得 $f'_y(1,1)=\dfrac{2}{3}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{3}$

23. **解**:两边对 x 求导

$2\cos(x+2y-3z)\cdot\left(1-3\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=1-3\dfrac{\partial z}{\partial x}$

$\therefore\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2\cos(x+2y-3z)-1}{3[2\cos(x+2y-3z)-1]}$

同理 $2\cos(x+2y-3z)\cdot\left(2-3\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=2-3\dfrac{\partial z}{\partial y}$

$\therefore\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{4\cos(x+2y-3z)-2}{3[2\cos(x+2y-3z)-1]}$

$\therefore\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{6\cos(x+2y-3z)-3}{3[2\cos(x+2y-3z)-1]}=1$

24. **解**:两边对 x 求导

$f'(x)+2f(x)=2x$

$f(x)=e^{-2x}\left(\displaystyle\int 2xe^{\int 2\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)=e^{-2x}\left(\displaystyle\int 2xe^{2x}\,\mathrm{d}x+C\right)=x-\dfrac{1}{2}+Ce^{-2x}$

25. **解**:令 $x-3=t$,幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}t^n$ 的收敛半径为

$R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\cdot 3}{n}=3$

即 $-3<t<3$,故 $-3<x-3<3$

$\therefore 0<x<6$

当 $x=0$ 时,$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

当 $x=6$ 时,$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

$\therefore$收敛区间为 $0\leqslant x<6$

26. **解**:方程的特征方程为 $r^2+4r+4=0$,特征根为 $r_1=r_2=-2$

齐次方程的通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$

非齐次项为 xe^{2x},2 不是特征根

$\therefore$有特解 $y^*=(Ax+B)e^{2x}$

代入方程得 $A=\dfrac{1}{16}\quad B=-\dfrac{1}{24}$

$\therefore$原方程的通解为 $y_1=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\left(\dfrac{1}{16}x-\dfrac{1}{24}\right)e^{2x}$

27. **解**:由 $y^2\geqslant 0$ 知 $x-1\geqslant 0$ 即 $x\geqslant 1$

$\therefore$积分区间为[1,2]

$\therefore V_x=\int_1^2 \pi(x-1)^3 \mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi$

28. **证明**:令 $f(x)=4x-1-\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$,则 $f(x)$为$[0,1]$上的连续函数

$\because \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t<\int_0^1 \mathrm{d}t=1$

$f(0)=-1$

$f(1)=3-\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}>2$

$\therefore f(x)$在$[0,1]$两端异号,由零点定理知至少存在一点

$\xi\in(0,1)$使 $f(\xi)=0$

又$\because f'(x)=4-\frac{1}{1+x^3}>3$

$\therefore f(x)$在$(0,1)$内单调增加

$\therefore f(x)$在$(0,1)$内至多有一个零点

$\therefore 4x-1-\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}=0$ 在$(0,1)$内有唯一实根得证.