全国各类成人高等学校招生考试

专科起点升本科

高等数学(一)全真模拟试卷(五)

(考试时间 120 分钟)

题　号	一	二	三	总　分	
题　分	40	40	70	统分人	
得　分				核分人	

得 分	阅卷人	核分人

一、选择题(在每题给出的四个选项中只有一项符合题目要求. 每题 4 分,共 40 分.)

1. $y=x^2 2^x+\sin 2$,则 $y'=$ 【　】

A. $2^x\cdot x^2\ln 2+x\cdot 2^{x+1}+\cos 2$　　B. $x\cdot 2^{x+1}\cdot\ln 2+\cos 2$

C. $2^x\cdot x^2\ln 2+x\cdot 2^{x+1}$　　D. $x\cdot 2^{x+1}\cdot\ln 2$

2. 设 $y=f(x)$在点 $x=0$ 处可导,且 $x=0$ 为 $f(x)$的极值点,则曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为 【　】

A. $y=f(0)$　　B. $y=f'(x)x+f(0)$

C. $y=f'(0)x+f(0)$　　D. $y=0$

3. 广义积分$\int_1^{+\infty} x^{-\frac{5}{3}}\mathrm{d}x=$ 【　】

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $-\frac{3}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

4. 改变积分 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$ 的积分次序,则 $I=$ 【　】

A. $\int_0^{x^2}\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^{2-x}\mathrm{d}x\int_1^2 f(x,y)\mathrm{d}y$　B. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$

C. $\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{d}x+\int_1^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y\int_1^2\mathrm{d}x$　D. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}x$

5. 微分方程 $y''-4y'+4y=0$ 的两个线性无关解是 【　】

A. e^{2x} 与 $2e^{2x}$　　B. e^{-2x} 与 xe^{-2x}

C. e^{2x} 与 xe^{2x}　　D. e^{-2x} 与 $4e^{-2x}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{1-\dfrac{3}{n}}}{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}=$　　【　　】

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 2

C. $\dfrac{1}{3}$　　D. 3

7. 若函数 $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$是无穷大量,则 x 趋近于　　【　　】

A. -2　　B. 2

C. -1　　D. 1

8. 下面函数中,在定义域内连续的是　　【　　】

A. $y=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$　　B. $y=\begin{cases}\sin x & x\leqslant 0\\ \cos x & x>0\end{cases}$

C. $y=\begin{cases}x+1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x-1 & x>0\end{cases}$　　D. $y=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$

9. 函数 $y=x^3-2x+1$ 在区间[1,2]上的最小值为　　【　　】

A. $1-\dfrac{8\sqrt{6}}{9}$　　B. 0

C. $1-\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$　　D. 5

10. 当 $x<x_0$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>x_0$ 时,$f'(x)<0$,那么 x_0 是 $f(x)$的　　【　　】

A. 无法确定是什么点　　B. 驻点

C. 极大值点　　D. 极小值点

得　分	阅卷人	核分人

二、填空题(将答案填在横线上.每题 4 分,共 40 分.)

11. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=$__________.

12. 设 $f(x)$有连续导数,$f(b)=5$,$f(a)=3$,则$\displaystyle\int_b^a f'(x)\mathrm{d}x=$__________.

13. 曲线$\begin{cases} y=\sin 2t \\ x=\cos t \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的法线方程为________.

14. $y=\ln(x-x^2)$的单调增加区间为__________.

15. $\displaystyle\int \frac{x}{4-x^2}\,dx=$________.

16. 设 $F(x)=\displaystyle\int_a^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,dt\,(0<a<x)$,则 $F'(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}})=$________.

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)}=$____________.

18. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$________.

19. 设 $f(x,y)=\ln(x+\dfrac{y}{2x})$,则 $f'_y(1,0)=$________.

20. 设 D :$-1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$,则 $\displaystyle\iint_D y^2\sin^3 x\,dx\,dy=$________.

得 分	阅卷人	核分人

三、解答题(应写出推理演算步骤. 共 70 分.)

21.(本题满分 8 分)

$$f(x)=\begin{cases} 1-\cos 2x & x>0 \\ 2x^2 & x\leqslant 0 \end{cases}$$,求 $f'(0)$.

22.(本题满分 8 分)

设方程 $e^{xy}+y^2=\cos y$ 存在隐函数 $y=f(x)$,求 y'.

23.(本题满分 8 分)

求$\int \frac{1+x+\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

24.(本题满分 8 分)

求$\int_0^8 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

25.(本题满分 8 分)

设 $z=x^2\ln y$,$x=\frac{u}{v}$,$y=3u-2v$,求$\frac{\partial z}{\partial u}$、$\frac{\partial z}{\partial v}$.

26.（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}x^{2n}$ 的收敛区间（端点处不考虑）.

27.（本题满分 10 分）

求曲线 $x^2-\arctan y-e^{xy}=0$ 在点 $(1,0)$ 处的法线与抛物线 $y=1-x^2$ 所围区域的面积 S 及此区域绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积.

28.（本题满分 10 分）

求方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{e^{y^2+3x}}{y}=0$ 满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解.

高等数学(一)全真模拟试卷(五)参考答案

一、选择题

1. C　2. A　3. D　4. B　5. C　6. A　7. D　8. D　9. B　10. A

二、填空题

11. $\frac{1}{2}$　12. -2　13. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$　14. $(0,\frac{1}{2})$　15. $-\frac{1}{2}\ln(4-x^2)+C$

16. $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$　17. $\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x)+C$　18. $\frac{\pi}{3}$　19. $\frac{1}{2}$　20. 0

三、解答题

21. **解:** $f'_{-}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{2x^2}{x}=0$

$f'_{+}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{1-\cos 2x}{x}=0$

$\therefore\quad f'(0)=0$

22. **解:** 方程两边对 x 求导

$e^{xy}(y+xy')+2y\cdot y'=-\sin y\cdot y'$

$$y'=-\frac{ye^{xy}}{xe^{xy}+2y+\sin y}$$

23. **解:** 原式 $=\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)+\int\arctan x\,d(\arctan x)$

$=\arctan x+\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+\dfrac{1}{2}(\arctan x)^2+C$

24. **解:** 设 $\sqrt[3]{x}=t,x=t^3,dx=3t^2dt$

$x=0,t=0;x=8,t=2$

$\displaystyle\int_0^8\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2}}=\int_0^2\frac{3t^2}{1+t^2}dt$

$=3\displaystyle\int_0^2(1-\frac{1}{1+t^2})dt$

$=3(t-\arctan t)\Big|_0^2$

$=3(2-\arctan 2)$

25. **解:** $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}$

$=2x\ln y\cdot\dfrac{1}{v}+\dfrac{x^2}{y}\cdot 3$

$=\dfrac{u}{v^2}\left[2\ln(3u-2v)+\dfrac{3u}{3u-2v}\right]$

$\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}$

$=2x\ln y\cdot\left(-\dfrac{u}{v^2}\right)+\dfrac{x^2}{y}\cdot(-2)$

$=-\dfrac{2u^2}{v^2}\left[\dfrac{\ln(3u-2v)}{v}+\dfrac{1}{3u-2v}\right]$

26. **解:** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^n x^{2(n+1)}}{2(n+1)}\right|\cdot\left|\dfrac{2n}{(-1)^{n-1}x^{2n}}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx^2}{n+1}$

$=x^2$

当 $x^2<1$ 时即 $|x|<1$ 时级数收敛

∴级数收敛区间为 $(-1,1)$

27. **解**:两边对 x 求导

$$2x-\frac{1}{1+y^2}\cdot y'-e^{xy}(y+xy')=0$$

将 $x=1,y=0$ 代入上式得切线斜率 $k=y'\Big|_{(1,0)}=1$

∴过点 $(1,0)$ 的法线方程为 $y=-(x-1)$ 即 $y=1-x$

$$\begin{cases}y=1-x\\y=1-x^2\end{cases}\quad \text{交点}(0,1)(1,0)$$

$$S=\int_0^1[(1-x^2)-(1-x)]dx$$

$$=\int_0^1(x-x^2)dx$$

$$=\frac{1}{6}$$

$$V_x=\pi\int_0^1[(1-x^2)^2-(1-x)^2]$$

$$=\pi\int_0^1(x^4-3x^2+2x)dx$$

$$=\frac{\pi}{5}$$

28. **解**:原方程变形为 $ye^{-y^2}dy=-e^{3x}dx$

两边积分 $-\frac{1}{2}\int e^{-y^2}d(-y^2)=-\frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x)$

$$-\frac{1}{2}e^{-y^2}=-\frac{1}{3}e^{3x}+C$$

即 $\quad 3e^{-y^2}=2e^{3x}+C$

将初始条件 $y(0)=0$ 代入上式,求出

$$C=1$$

原方程满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解为

$$3e^{-y^2}-2e^{3x}=1$$