全国各类成人高等学校招生考试

专科起点升本科

高等数学(一)全真模拟试卷(四)

(考试时间 120 分钟)

题　号	一	二	三	总　分	
题　分	40	40	70	统分人	
得　分				核分人	

得 分	阅卷人	核分人

一、选择题(在每题给出的四个选项中只有一项符合题目要求. 每题 4 分,共 40 分.)

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x \, dx =$ 【　】

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. 0　　D. 1

2. 设 $f(x)=2^x$,则 $\int f'(\sin x)\cos x \, dx =$ 【　】

A. $-2^{\cos x}+C$　　B. $2^{\cos x}+C$

C. $-2^{\sin x}+C$　　D. $2^{\sin x}+C$

3. 下列广义积分中不收敛的是 【　】

A. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$　　B. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x} dx$

C. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$　　D. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

4. 方程 $y''+y'+y=2xe^{-x}$ 的特解为 $y^*=$ 【　】

A. $(Ax+B)xe^{-x}$　　B. $(Ax+B)e^{-x}$

C. $(Ax+B)x^2e^{-x}$　　D. xe^{-x}

5. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛的 【　】

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 非充分非必要条件

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}=$　【　】

A. 1　　B. 2

C. 4　　D. 不存在

7. 当 $x\to 0$ 时，下列函数是无穷大量的是　【　】

A. $e^{\frac{1}{x}}$　　B. $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$

C. $\dfrac{3x^2}{x^2+1}$　　D. $\cot x$

8. 满足 $f'(x)=2(e^{2x}-e^{-2x})$ 的函数 $f(x)$ 是　【　】

A. $e^{2x}-e^{-2x}$　　B. $e^{2x}+e^{-2x}$

C. $2(e^{x}-e^{-x})$　　D. $4(e^{2x}+e^{-2x})$

9. 设 $f'(x)$ 为连续函数，则 $\int f'(x)\mathrm{d}x=$　【　】

A. $f'(x)$　　B. $f'(x)+C$

C. $f(x)$　　D. $f(x)+C$

10. 若 $2k\tan 2x$ 的一个原函数是 $\dfrac{1}{3}\ln\cos 2x$，则 $k=$　【　】

A. $-\dfrac{4}{3}$　　B. $\dfrac{4}{3}$

C. $-\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

得 分	阅卷人	核分人

二、填空题(将答案填在横线上.每题 4 分，共 40 分.)

11. 设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-1}{\sin(x-1)}=2$，则 $a=$__________.

12. 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}+a & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

13. 函数 $f(x)=xe^{-x}$ 在$[-1,2]$上的最小值是__________.

14. 设 $y=\sin x\cdot\ln(\cos x)$，则在点(0,0)处的切线方程为______________.

15. 函数 $f(x)=\int_0^x e^{4t-t^2}\mathrm{d}t$ 的凹区间为__________.

16. 设 $f(x)$是连续函数且 $f(1)=3$,则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ ________.

17. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$,则 $f'_x(x,1)=$ ________.

18. 设$\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^k x}$是收敛的,则 k 的取值范围为________.

19. 平面 $3x+2y+z-6=0$ 与平面 $x-2y+z+3=0$ 的位置关系是________.

20. 设区域 D 由 $-1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1$ 确定,则 $\displaystyle\iint_D x(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

得 分	阅卷人	核分人

三、解答题(应写出推理演算步骤.共 70 分.)

21.(本题满分 8 分)

求$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

22.(本题满分 8 分)

方程 $y=1+xe^{y^2}$ 确定隐函数 $y=y(x)$,求 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}$.

23.（本题满分 8 分）

已知 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，求 $\int_0^1 x f''(2x)\mathrm{d}x$.

24.（本题满分 8 分）

设 $z=\sin xy+\varphi(x,\frac{x}{y})$，且 $\varphi(u,v)$ 可微，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$.

25.（本题满分 8 分）

求 $\int_0^{\pi}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta$.

26.（本题满分 10 分）

过抛物线 $y=x^2$ 上一点 $P(2,4)$ 作切线 l，求 l 与抛物线 $y=-x^2+4x+1$ 所围图形的面积.

27.（本题满分 10 分）

求方程 $(1+e^x)y\cdot y'=e^x$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解.

28.（本题满分 10 分）

平面 $x=1, x=-1, y=-1$ 围成的柱体被平面 $z=0, 2x-3y+z=1$ 所截，求此截体的体积 V.

高等数学(一)全真模拟试卷(四)参考答案

一、选择题

1.B　2.D　3.C　4.B　5.A　6.A　7.D　8.B　9.D　10.C

二、填空题

11.0

12.1

13.$-e$

14.$y=0$

15. $(-\infty,2)$

16. 3

17. 1

18. $k>1$

19. 垂直

20. $-\dfrac{4}{3}$

三、解答题

21. **解**:原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\cdot 2\sin x\cos x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4x\,d(\sin x)=\dfrac{2}{5}\sin^5x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{5}$

22. **解**:设 $F(x,y)=y-1-xe^{y^2}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{-e^{y^2}}{1-2xye^{y^2}}=\frac{e^{y^2}}{1-2xye^{y^2}}$$

当 $x=0$ 时 $y=1$

$$\therefore dy\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=\frac{e^{y^2}}{1-2xye^{y^2}}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}dx=e\,dx.$$

23. **解**:$\int_0^1 xf''(2x)dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1 x\,df'(2x)=\dfrac{1}{2}xf'(2x)\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)dx$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot f'(2)-\frac{1}{4}f(2x)\Big|_0^1=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}[f(2)-f(0)]$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}(3-1)=2$$

24. **解**:$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cos xy+\varphi'_1+\dfrac{1}{y}\varphi'_2$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos xy-\frac{x}{y^2}\varphi'_2$$

25. **解**:原式 $=\int_0^{\pi}d\theta-\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cdot\sin\theta\,d\theta=\pi+\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)d\cos\theta$

$$=\pi+\cos\theta\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi}=\pi-\frac{4}{3}$$

26. **解**:$y'=2x$,切线斜率为 $k=4$

l 的方程为 $y-4=4(x-2)$,即 $y=4x-4$

由 $\begin{cases}y=4x-4\\y=-x^2+4x+1\end{cases}$ 得交点$(\sqrt{5},4\sqrt{5}-4)$,$(-\sqrt{5},-4\sqrt{5}-4)$

$$S=\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}[(-x^2+4x+1)-(4x-4)]dx=\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(-x^2+5)dx$$

$$=2\int_{0}^{\sqrt{5}}(-x^{2}+5)\mathrm{d}x=\frac{20}{3}\sqrt{5}$$

27. **解**:原方程变形为

$$y\mathrm{d}y=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\ \mathrm{d}x$$

两边积分

$$\int y\mathrm{d}y=\int\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\ \mathrm{d}x$$

$$\int y\mathrm{d}y=\int\frac{1}{1+e^{x}}\ \mathrm{d}(1+e^{x})$$

$$\frac{1}{2}y^{2}=\ln(1+e^{x})+C$$

即 $y^{2}=2\ln(1+e^{x})+C$

将初始条件 $y|_{x=1}=1$ 代入上式

求出 $C=1-2\ln(1+e)$

原方程特解为 $y^{2}=2\ln(1+e^{x})+1-2\ln(1+e)$

28. **解**:$V=\iint\limits_{D}(1-2x+3y)\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}(1-2x+3y)\mathrm{d}y\ \left(\int_{-1}^{1}3y\mathrm{d}y=0\right)$$

$$=\int_{-1}^{1}2(1-2x)\mathrm{d}x\ \left(\int_{-1}^{1}2(-2x)\mathrm{d}x=0\right)=\int_{-1}^{1}2\mathrm{d}x=4$$